

V O R W O R T

Autor dieses Heftes ist:

DR.-ING. MANFRED MAHLER

Wiss. Angestellter am Lehr-
und Forschungsgebiet
Baukonstruktionslehre und Bauphysik
der Bergischen Universität
Gesamthochschule Wuppertal

In der vorliegenden Schriftenreihe soll über Forschungsaktivitäten aus den Bereichen Baukonstruktion und Bauphysik berichtet werden. Neben der Veröffentlichung wissenschaftlicher Arbeiten bietet sie darüber hinaus die Möglichkeit, neue Erkenntnisse einem größeren Kreis von Interessenten zugänglich zu machen.

DISSERTATION,

genehmigt vom Fachbereich Bautechnik
der Bergischen Universität-GH Wuppertal

Mit dem Bericht Nr.1 werden die Ergebnisse einer wissenschaftlichen Arbeit auf dem Gebiet der instationären Temperaturfelder veröffentlicht, wobei erstmals eine analytische Lösung eindimensionaler, mehrschichtiger Konstruktionen bei beliebigen Randbedingungen und innenliegenden Wärmequellen hergeleitet wird.

Dissertationsschrift eingereicht : 22. Juni 1987
Mündliche Prüfung und Disputation: 12. Januar 1988

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. C. Langlie
Prof. Dr.-Ing. W. Klingsch
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. C.J.Diederichs

ISBN 3-925795-90-1, Bericht Nr. 1 der Forschungs- und Arbeitsberichte aus den Bereichen Baukonstruktion und Bauphysik an der Bergischen Universität-GH Wuppertal, herausgegeben von C. Langlie

Wuppertal im Januar 1989

Bezugsadresse : Bergische Universität-GH Wuppertal,
Fachbereich Bautechnik,
Prof. Dr.-Ing. C. Langlie
Pauluskirchstraße 7, 5600 Wuppertal 2
Tel. 0202/4393085

C. Langlie

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter an der Bergischen Universität-GH Wuppertal. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. C. Langlie für die mir zuteil gewordene Förderung sowie für die zahlreichen praxisorientierten Aspekte. Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Klingsch danke ich für die Übernahme des Koreferates und für das intensive Interesse, das er dem hier vorgestellten Lösungsverfahren entgegengebracht hat.

Meiner Kollegin, Dipl.-Ing. E.-M. Maus, und meinen Kollegen, Dipl.-Ing. W. Möller, H. Peters, W. Meteling, verdanke ich wertvolle Ratschläge.

Ferner gilt mein Dank allen Lehrstuhlmitarbeitern, insbesondere Herrn P. Komander, Frau B. Küper und Frau E. Leichtweiß.

Wuppertal, im Januar 1989

Manfred Mahler

ANALYTISCHE LÖSUNG DER INSTATIONÄREN
TEMPERATURFELDGLEICHUNG FÜR BELIEBIGE
RANDBEDINGUNGEN BEI BERÜCKSICHTIGUNG
INNERER WÄRMEQUELLEN

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
des Fachbereiches Bautechnik an der
Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal

von
Dipl.-Ing. Manfred Mahler
aus Werdohl

Wuppertal 1987

INHALTSVERZEICHNIS

0.	Einleitung	1
1.	Instationärer Temperaturverlauf in eindimensionalen mehrschichtigen Bauteilen	4
1.1	Stationärer Temperaturanteil	10
1.2	Dynamischer Temperaturanteil	13
1.2.1	Bestimmung der Eigenfunktionen	14
1.2.2	Lösung der Zeitfunktionen	21
1.2.2.1	Orthogonalitätsbedingungen	21
1.2.2.2	Homogene Lösung der Zeit-Differential- gleichung	28
1.2.2.3	Spezielle Lösung der Zeit-Differential- gleichung	28
1.2.2.4	Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung	30
2.	Instationärer Temperaturverlauf in zweidimensionalen einschichtigen Bauteilen	44
3.	Instationärer Temperaturverlauf in dreidimensionalen einschichtigen Bauteilen	48
4.	Genauigkeitsbetrachtungen	49
4.1	Zum Vergleich herangezogene Lösungsverfahren zur Wärmeleitgleichung	49
4.1.1	Das Differenzenverfahren	49
4.1.2	Die Finite-Element-Methode	51
4.1.3	Das Matrizenverfahren von Heindl	53
4.1.4	Das zeichnerische Verfahren von Schmidt	54
4.2	Vergleichsrechnungen	55
4.2.1	Numerische Betrachtungen	55
4.2.2	Eingeschwungener Temperaturzustand	63

4.2.3	Approximation der Anfangsbedingung	76
4.2.3.1	Lineare Anfangsbedingung	76
4.2.3.2	Parabolischer Verlauf aus innerer Wärmequelle	82
4.2.4	Eindimensionaler Temperaturverlauf in mehrschichtigen Bauteilen	86
4.2.5	Berücksichtigung einer inneren Wärmequelle	88
4.2.6	Abkühlungsvorgang	92
4.2.7	Zweidimensionale Temperaturfelder	97
4.3	Laborversuch	101
5.	Vereinfachung der Berechnung für Abkühlungsvorgänge	108
6.	Schlußbemerkungen	111
6.1	Zusammenfassung	111
6.2	Ausblick	113
	Literaturverzeichnis	114

Bezeichnungen

t	Zeit [h]
T	Temperatur [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
$\overset{m}{\lambda}$	Wärmeleitfähigkeit der m-ten Schicht [W/(mK)]
$\overset{m}{\rho}$	Dichte der m-ten Schicht [kg/m ³]
$\overset{m}{c}$	spezifische Wärmekapazität der m-ten Schicht [Wh/(kgK)]
$\overset{m}{\alpha}$	Temperaturleitfähigkeit der m-ten Schicht [m ² /h]
$\overset{m}{Q}$	Wärmequellenenergiebigkeit der m-ten Schicht [W/m ³]
$\overset{m}{s}$	Schichtdicke der m-ten Schicht [m]
$\overset{m}{z}$	laufende Koordinate der m-ten Schicht [m]
$\overset{m}{T}$	Temperatur der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
$\overset{m}{\bar{T}}$	stationärer Temperaturanteil der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
$\overset{m}{\tilde{T}}$	dynamischer Temperaturanteil der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
$\overset{m}{T_0}$	Anfangstemperatur der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
t_0	Anfangszeitpunkt [h]
$\overset{m}{S_0}$	Koeffizient zur Bestimmung der Anfangstemperatur in der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]

- $\overset{m}{\vartheta}_1$ Koeffizient zur Bestimmung der Anfangstemperatur in der m-ten Schicht [$^{\circ}\text{C}/\text{m}, \text{K}/\text{m}$]
- $\overset{m}{Q}_0$ Koeffizient zur Bestimmung der Anfangstemperatur aus Wärmequelle in der m-ten Schicht [K/m^2]
- $\overset{m}{Q}_0$ Wärmequelleneigenschaft zum Anfangszeitpunkt in der m-ten Schicht [W/m^3]
- α_i Wärmeübergangskoeffizient innen [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$]
- α_a Wärmeübergangskoeffizient außen [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$]
- ϑ_i Umgebungslufttemperatur innen [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
- ϑ_a Umgebungslufttemperatur außen [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
- q_i Wärmestromdichte innen [W/m^2]
- q_a Wärmestromdichte außen [W/m^2]
- $\overset{m}{C}_0, \overset{m}{C}_1$ Integrationskonstante aus den inhomogenen Rand- bzw. Übergangsbedingungen
- $\overset{m}{\varphi}_k$ k-te Eigenfunktion in der m-ten Schicht
- T_k k-te Zeitfunktion
- ω_k k-ter Eigenwert des homogenen Gleichungssystems
- $\overset{m}{\chi}_k$ k-ter Eigenwert in der m-ten Schicht

- $\overset{m}{A}_k$ Integrationskonstante aus den homogenen Rand- bzw. Übergangsbedingungen
- $\overset{m}{B}_k$ Integrationskonstante aus den homogenen Rand- bzw. Übergangsbedingungen
- $\overset{h}{T}_k$ homogene Lösung der Zeit-Funktion
- $\overset{s}{T}_k$ spezielle Lösung der Zeit-Funktion
- σ_k rechte Seite der inhomogenen Zeit-Differentialgleichung
- D_k Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung
- \tilde{f} Näherungsfunktion für die Anfangsbedingung
- $\overset{m}{\delta}_k$ k-ter Koeffizient der Näherungsfunktion der Anfangsbedingung in der m-ten Schicht
- $\overset{m}{\psi}_{ik}$ Hilfsausdruck bei der Auswertung der Eigenfunktionsintegrale für $i = 0, 1, 2, 3, 4$
- \tilde{t}_k Temperaturredächtnis
- T_B Bezugstemperatur [$^{\circ}\text{C}, \text{K}$]
- D_N Nennerdeterminante aus dem Eigenwertproblem
- $(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial t}$ Zeitableitung
- $(\dots)' = \frac{\partial(\dots)}{\partial z}$ Ortsableitung

0. Einleitung

Die Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung hat seit der Aufstellung von Fourier zahlreiche Wissenschaftler beschäftigt, so daß eine Fülle von graphischen und numerischen Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Aufgrund der vielfältigen technischen Anwendungsgebiete sind für etliche Sonderfälle Berechnungsverfahren in der umfangreichen Literatur angegeben, [1] bis [12].

Seit Einführung der modernen Datenverarbeitungsanlagen sind numerische Verfahren (Differenzenverfahren, Finite-Element-Methode) entwickelt worden, mit denen selbst komplizierte räumliche Strukturen unter beliebigen Randbedingungen berechnet werden können.

In der jüngsten Literatur wird die Kopplung der Wärmeleitungsgleichung mit den mechanischen Bewegungsgleichungen nachgewiesen, [13] bis [16].

Heinen [16] zeigt jedoch in seiner Arbeit auf, daß eine Berücksichtigung des Kopplungseffektes nur bei schockartigen Temperaturbelastungen notwendig ist, so daß im bauphysikalischen Bereich darauf verzichtet werden kann.

In [16] wird zum ersten Mal der Entwicklungssatz als Lösungsmöglichkeit für die Wärmeleitungsgleichung bei Platten und Schalen vorgestellt.

Die vorliegende Arbeit greift den Gedanken von Heinen auf und erweitert die Theorie auf mehrschichtige Konstruktionen, wobei erstmals eine geschlossene Lösung für zeitlich veränderliche innere Wärmequellen und -senken angegeben wird.

Im Gegensatz zu den bisher bekannten analytischen Berechnungsmöglichkeiten sind bei der gewählten Lösungsmethode über den Entwicklungssatz beliebige Randbedingungen für Temperatur und Wärmestrom erlaubt. Anfangstemperaturen können als lineare oder quadratische Funktionen angenommen werden; dadurch lassen sich die in der Literatur häufig benutzten thermischen Ausgleichsvorgänge (Abkühlung bzw. Aufheizen) in bisher nicht dagewesener einfacher Weise rechnerisch erfassen.

Unter Ziffer 1 wird die eindimensionale Lösung der instationären Temperaturfeldgleichung in mehrschichtigen Bauteilen für die bereits beschriebenen beliebigen Rand- und Anfangsbedingungen sowie für innere Wärmequellen und -senken hergeleitet. Der Lösungsansatz beinhaltet einen statischen Anteil zur Erfüllung der inhomogenen Randbedingungen, während der dynamische Anteil die homogenen Randbedingungen befriedigt. Die stationäre Lösung läßt sich in elementarer Weise für den Augenblickszustand angeben. Für den dynamischen Lösungsterm wird der Entwicklungssatz verwendet, der eine unendliche Reihe von Produkten aus Eigen- und Zeitfunktionen enthält. Die Eigenfunktionen lassen sich aus dem Eigenwertproblem der homogenen Randbedingungen angeben. Zur Ermittlung der Zeitfunktionen benötigt man die Anfangsbedingung, welche hier sinnvollerweise mit Hilfe der Eigenfunktionen nach dem Prinzip des Minimums der Fehlerquadrate in Reihenschreibweise entwickelt wird.

Für zweidimensionale einschichtige Bauteile (z.B. Stützen) wird in Kapitel 2 eine Lösungsmöglichkeit vorgeschlagen, welche sich von den üblichen Betrachtungsweisen unterscheidet. Während bisher das Ergebnis aus der Superposition der dimensionslosen Ergebnisse der beiden eindimensionalen Lösungen zustande kam, kann hier mit den "Original"-Temperaturen gearbeitet werden, wobei eine Bezugstemperatur eingeführt wird.

Die Ausdehnung des Verfahrens auf dreidimensionale einschichtige Bauteile (Kubus, Wand) schließt sich in Ziffer 3 an.

Numerische Untersuchungen über die Genauigkeit des Verfahrens bei unterschiedlicher Anzahl der Reihenglieder für verschiedene Problemstellungen sind in Kapitel 4 angestellt worden. Dabei wurden Vergleichsrechnungen nach vier unterschiedlichen und dort näher erläuterten Verfahren (Gears-Methode, Finite-Element-Methode, Heindl-Verfahren, Schmidt-Verfahren) herangezogen. Zur besseren Übersicht werden die Genauigkeitsvergleiche mit Hilfe von Plotts dargestellt.

Zusätzlich wurde in einem Laborversuch an einem kubischen Probekörper aus Leichtbeton mit 20 innenliegenden Meßpunkten in einer Temperaturkammer ein Abkühlvorgang verfolgt.

Unter Ziffer 5 sind in der vorliegenden Arbeit für den häufig in der Literatur behandelten Sonderfall der plötzlichen Abkühlung einfache Formeln angegeben, die sich aus der für diesen Fall bedeutend verkürzten Lösung ergeben. Mit Hilfe eines Diagrammes lassen sich damit sofort genaue Aussagen über Auskühlzeiten und der damit verbundenen Wärmespeicherfähigkeit treffen.

1. Instationärer Temperaturverlauf in eindimensionalen mehrschichtigen Bauteilen

Im folgenden soll für einen n-schichtigen Wand- bzw. Deckenaufbau mit zeitlich beliebig veränderbaren Randbedingungen der Temperaturen und Wärmeströme sowie schichtweise instationärer innerer Wärmequellen der Temperaturverlauf in allgemeiner Weise abgeleitet werden.

Geometrie, Materialdaten und Randbedingungen sind aus Bild 1 zu ersehen.

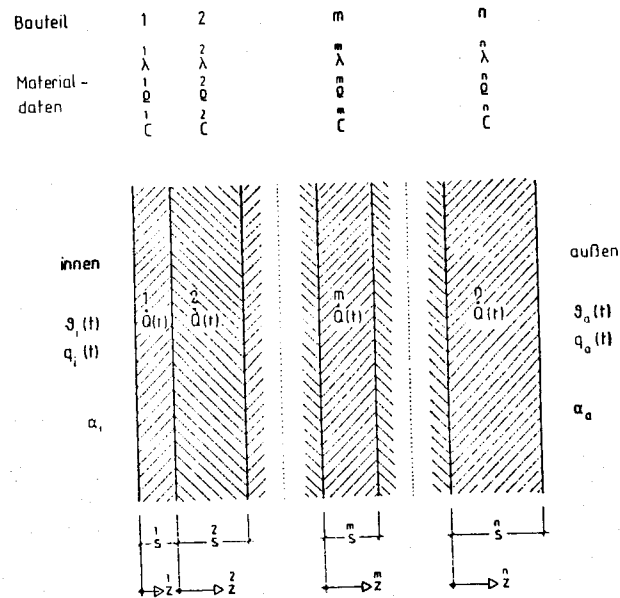


Bild 1: n-schichtiger Wand- bzw. Deckenaufbau

Die Wärmeleitdifferentialgleichung lautet für die m-te Schicht ($1 \leq m \leq n$) bei Berücksichtigung einer zeitlich veränderlichen inneren Wärmequelle

$$\frac{\partial T^m(z,t)}{\partial t} = \frac{\lambda^m}{\rho^m c^m} \frac{\partial^2 T^m(z,t)}{\partial z^2} + \frac{Q^m(t)}{\rho^m c^m} \quad (1.1)$$

Wobei $T^m(z,t)$ die Temperatur in der m-ten Schicht an der Stelle z ($0 \leq z \leq s$) zum Zeitpunkt t angibt.

Die Randbedingungen lassen sich über die Wärmestromdichte angeben.

Randbedingung innen:

$$\lambda^1 T^1(z=0,t) = \alpha_1 [T^1(z=0,t) - \vartheta_1(t)] - q_1(t) \quad (1.2)$$

Randbedingung außen:

$$\lambda^n T^n(z=s,t) = \alpha_o [\vartheta_o(t) - T^n(z=s,t)] + q_o(t) \quad (1.3)$$

Die n-1 Übergangsbedingungen werden wie folgt formuliert.

Aus der Identität der Wärmestromdichte:

$$\lambda^m T^m(z=s,t) = \lambda^{m+1} T^{m+1}(z=0,t) \quad (1.4)$$

Aus Temperaturgleichheit:

$$\overset{m}{T}(z=s, t) = \overset{m+1}{T}(z=0, t) \quad (1.5)$$

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ mögen alle Bauteilschichten eine frei vorgebbare Anfangstemperatur der Form

$$\overset{0}{T}(z, t_0) = \overset{0}{T}_0 + \overset{0}{T}_1 z - \frac{\overset{0}{Q}_0}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2 \quad (1.6)$$

haben, wobei $\overset{0}{Q}_0 = \overset{0}{Q}_0 / \lambda$ mit $\overset{0}{Q}_0$ als Wärmequellenenergiebiegkeit in $[W/m^3]$.

In der vorliegenden Arbeit soll als Lösungsansatz für die Temperatur $\overset{m}{T}(z, t)$ eine Summe aus quasistatischen und dynamischen Temperaturfunktionen gewählt werden. Dabei wird verlangt, daß der quasistatische Anteil die inhomogenen Randbedingungen erfüllt; der verbleibende dynamische Temperaturanteil muß dann lediglich die homogenen Rand- und Übergangsbedingungen befriedigen.

$$\overset{m}{T}(z, t) = \overset{m}{T}(z, t) + \overset{m}{T}(z, t) \quad (1.7)$$

Mit (\dots) für die Zeitableitungen $\frac{\partial(\dots)}{\partial t}$
 und $(\dots)'$ für die Ortsableitungen $\frac{\partial(\dots)}{\partial z}$

Sowie der Temperaturleitfähigkeit

$$\overset{m}{a} = \frac{\overset{m}{\lambda}}{\overset{m}{\rho} \overset{m}{c}} \quad (1.8)$$

Läßt sich die Differentialgleichung (1.1) nach Einsetzen von (1.7) umformen

$$\overset{m}{\dot{T}} + \overset{m}{T} = \overset{m}{a} \overset{m}{T}'' + \overset{m}{a} \overset{m}{T}'' + \frac{\overset{m}{Q}(t)}{\overset{m}{\rho} \overset{m}{c}} \quad (1.9)$$

Hieraus läßt sich sofort mit

$$\overset{m}{Q}(t) = \overset{m}{Q}(t) / \lambda$$

die quasistatische Lösung

$$\overset{m}{a} (\overset{m}{T}'' + \overset{m}{Q}(t)) = 0 \quad (1.10)$$

separieren, so daß der verbleibende Teil von (1.9) die dynamische Lösung liefern wird.

Mit (1.7) lassen sich die Randbedingungen (1.2) und (1.3) aufspalten in inhomogene Anteile für die quasistatischen und homogene Anteile für die dynamische Lösung.

Randbedingung innen:

$$\lambda \overset{1}{T}'(z=0,t) + \lambda \overset{1}{T}'(z=0,t) = \alpha_1 [\overset{1}{T}(z=0,t) + \overset{1}{T}(z=0,t) - \vartheta_1(t)] - q_1(t) \quad (1.11)$$

inhomogen:

$$\lambda \overset{1}{T}'(z=0,t) = \alpha_1 [\overset{1}{T}(z=0,t) - \vartheta_1(t)] - q_1(t) \quad (1.12)$$

homogen:

$$\lambda \overset{1}{T}'(z=0,t) = \alpha_1 \overset{1}{T}(z=0,t) \quad (1.13)$$

Randbedingung außen:

$$\lambda \overset{n}{T}'(z=s,t) + \lambda \overset{n}{T}'(z=s,t) = \alpha_a [\vartheta_a(t) - \overset{n}{T}(z=s,t) - \overset{n}{T}(z=s,t)] + q_a(t) \quad (1.14)$$

inhomogen:

$$\lambda \overset{n}{T}'(z=s,t) = \alpha_a [\vartheta_a(t) - \overset{n}{T}(z=s,t)] + q_a(t) \quad (1.15)$$

homogen

$$\lambda \overset{n}{T}'(z=s,t) = -\alpha_a \overset{n}{T}(z=s,t) \quad (1.16)$$

Übergangsbedingung Wärmestrom

$$\lambda \overset{m}{T}'(z=s,t) + \lambda \overset{m}{T}'(z=s,t) = \lambda \overset{m+1}{T}'(z=0,t) + \lambda \overset{m+1}{T}'(z=0,t) \quad (1.17)$$

inhomogen:

$$\lambda \overset{m}{T}'(z=s,t) = \lambda \overset{m+1}{T}'(z=0,t) \quad (1.17a)$$

homogen:

$$\lambda \overset{m}{T}'(z=s,t) = \lambda \overset{m+1}{T}'(z=0,t) \quad (1.17b)$$

Übergangsbedingung Temperatur

$$\overset{m}{T}(z=s,t) + \overset{m}{T}(z=s,t) = \overset{m+1}{T}(z=0,t) + \overset{m+1}{T}(z=0,t) \quad (1.18)$$

inhomogen:

$$\overset{m}{T}(z=s,t) = \overset{m+1}{T}(z=0,t) \quad (1.18a)$$

homogen:

$$\overset{m}{T}(z=s,t) = \overset{m+1}{T}(z=0,t) \quad (1.18b)$$

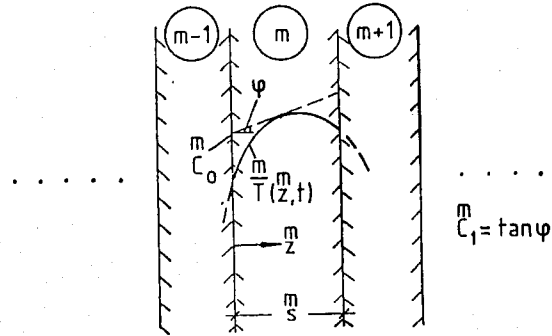
Die Anfangsbedingung (1.6) lautet:

$$\bar{T}(z, t = t_0) + \bar{T}(z, t = t_0) = \bar{\vartheta}_0 + \bar{\vartheta}_1 z - \frac{\bar{Q}_0}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2 \quad (1.19)$$

1.1 Stationärer Temperaturanteil

Es gilt die Forderung (1.10), deren Lösung eine Gleichung der Form

$$\bar{T}(z, t) = \bar{C}_0(t) + \bar{C}_1(t)z - \frac{\bar{Q}(t)}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2 \quad (1.20)$$



ist. Fehlt die innere Wärmequelle, so erhält der Temperaturverlauf den (hinlänglich bekannten) linearen Charakter.

Die $2n$ unbekanntenen Konstanten $\bar{C}_0(t)$ und $\bar{C}_1(t)$, im folgenden mit \bar{C}_0 , \bar{C}_1 bezeichnet, müssen aus den inhomogenen Rand- bzw. Übergangsbedingungen befriedigt werden.

Randbedingung innen (1.12): $\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_i \cdot (T(\text{ort}) - \vartheta_i) - q_i$;

$$\lambda \left(\bar{C}_1 - \frac{\bar{Q}(t)}{2} \right) \left(2z - \frac{s}{2} \right) = \alpha_i \left[\bar{C}_0 + \bar{C}_1 z - \frac{\bar{Q}(t)}{2} \left(z - \frac{s}{2} \right)^2 - \vartheta_i(t) \right] - q_i(t)$$

$$\alpha_i \bar{C}_0 - \lambda \bar{C}_1 = \alpha_i \vartheta_i(t) + q_i(t) + \frac{\bar{Q}(t)}{2} \left(\frac{\alpha_i s}{4} + \lambda \right) \quad (1.21)$$

Übergangsbedingungen:

Wärmestromgleichheit (1.17) ($1 \leq m \leq n$)

$$\lambda \bar{C}_1 - \frac{\lambda \bar{Q}(t)}{2} (2s - s) = \lambda \bar{C}_1 + \frac{\lambda \bar{Q}(t)}{2} s$$

$$\lambda \bar{C}_1 - \lambda \bar{C}_1 = \frac{\lambda s}{2} \bar{Q}(t) + \frac{\lambda s}{2} \bar{Q}(t) \quad (1.22)$$

Temperaturgleichheit (1.18) ($1 \leq m \leq n$)

$$\bar{C}_0 + \bar{C}_1 s - \frac{\bar{Q}(t)}{2} \left(s - \frac{s}{2} \right)^2 = \bar{C}_0 - \frac{\bar{Q}(t)}{2} \left(-\frac{s}{2} \right)^2$$

$$\bar{C}_0 + s \bar{C}_1 - \bar{C}_0 = \bar{Q}(t) \frac{s^2}{8} - \bar{Q}(t) \frac{s^2}{8} \quad (1.23)$$

Randbedingung außen (1.15)

$$\lambda \bar{C}_1 - \frac{\lambda \bar{Q}(t)}{2} s = \alpha_a \left[\vartheta_a(t) - \bar{C}_0 - \bar{C}_1 s + \bar{Q}(t) \frac{s^2}{8} \right] + q_a(t)$$

$$\alpha_a \bar{C}_0 + (\lambda + \alpha_a s) \bar{C}_1 = \alpha_a \vartheta_a(t) + q_a(t) + \frac{\lambda \bar{Q}(t)}{2} \left(\lambda + \alpha_a \frac{s}{4} \right) \quad (1.24)$$

Aus den vorgenannten Rand- und Übergangsbedingungen läßt sich nun folgendes Gleichungssystem (Bild 2) für die quasistatischen Konstanten $\overset{m}{C}_0, \overset{m}{C}_1$ ($1 \leq m \leq n$) für den Zeitpunkt t angeben.

$\overset{1}{C}_0$	$\overset{1}{C}_1$	$\overset{2}{C}_0$	$\overset{2}{C}_1$...	$\overset{m}{C}_0$	$\overset{m}{C}_1$	$\overset{m-1}{C}_0$	$\overset{m-1}{C}_1$...	$\overset{n}{C}_0$	$\overset{n}{C}_1$	R
α_1	$-\lambda$	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	$\alpha_1 \vartheta_1(t) + q_1(t) \frac{Q(t) \overset{1}{s}}{2} \left(\frac{\alpha_1 \overset{1}{s} + \lambda}{4} \right)$
0	λ	0	$-\lambda$...	0	0	0	0	...	0	0	$\frac{\lambda \overset{1}{s}}{2} Q(t) + \frac{\lambda \overset{2}{s}}{2} Q(t)$
1	$\frac{1}{s}$	-1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	$\frac{\overset{1}{s} \overset{1}{s}}{8} Q(t) - \frac{\overset{2}{s} \overset{2}{s}}{8} Q(t)$
...
0	0	0	0	...	0	λ	0	$-\lambda$...	0	0	$\frac{\overset{m}{s} \overset{m}{s}}{2} Q(t) - \frac{\overset{m-1}{s} \overset{m-1}{s}}{2} Q(t)$
0	0	0	0	...	1	$\frac{m}{s}$	-1	0	...	0	0	$\frac{\overset{m}{s} \overset{m}{s}}{8} Q(t) - \frac{\overset{m-1}{s} \overset{m-1}{s}}{8} Q(t)$
...
0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	α_n	$\overset{n}{s} \alpha_n + \lambda$	$\alpha_n \vartheta_n(t) + q_n(t) \frac{\overset{n}{s} Q(t)}{2} \left(\alpha_n \frac{\overset{n}{s}}{\overset{n}{s}} + \lambda \right)$

(1.25)

Bild 2: Gleichungssystem aus den inhomogenen Randbedingungen zur Bestimmung der stationären Lösung

1.2 Dynamischer Temperaturanteil

Der verbleibende Anteil aus (1.9) lautet

$$\overset{m}{T} - \overset{m}{a} \overset{m}{T}'' = -\overset{m}{T} \quad (1.26)$$

Es gilt die Anfangsbedingung: (aus 1.19)

$$\overset{m}{T}(z, t = t_0) = \overset{m}{\vartheta}_0 + \overset{m}{\vartheta}_1 z - \frac{\overset{m}{Q}}{2} \left(z - \frac{\overset{m}{s}}{2} \right)^2 - \overset{m}{T}(z, t = t_0) \quad (1.27)$$

Die Randbedingung innen (1.13):

$$\lambda \overset{1}{T}'(z=0, t) = \alpha_1 \overset{1}{T}(z=0, t)$$

Die Randbedingung außen (1.16):

$$\lambda \overset{n}{T}'(z=s, t) = -\alpha_n \overset{n}{T}(z=s, t)$$

Die n-1 Übergangsbedingungen

Wärmestrom: (1.17b)

$$\overset{m}{\lambda} \overset{m}{T}'(z=s, t) = \overset{m-1}{\lambda} \overset{m-1}{T}'(z=0, t) \quad (1.28)$$

Temperatur: (1.18b)

$$\overset{m}{T}(z=S, t) = \overset{m+1}{T}(z=0, t) \quad (1.29)$$

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Entwicklungssatzes:

$$\overset{m}{T}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{m}{\varphi}_k(z) \tau_k(t) \quad (1.30)$$

mit

$\overset{m}{\varphi}_k(z)$ als Eigenfunktionen der m-ten Schicht
mit dem k-ten Eigenwert

$\tau_k(t)$ als Zeitfunktionen mit dem k-ten
Eigenwert

1.2.1 Bestimmung der Eigenfunktionen

Mit dem Entwicklungssatz (1.30) läßt sich die homogene
Differentialgleichung (1.26) nun angeben zu:

$$\overset{m}{\varphi}_k(z) \dot{\tau}_k(t) - \overset{m}{a} \overset{m}{\varphi}_k''(z) \tau_k(t) = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\dot{\tau}_k(t)}{\tau_k(t)} = \overset{m}{a} \frac{\overset{m}{\varphi}_k''(z)}{\overset{m}{\varphi}_k(z)} = -\omega_k \quad (1.32)$$

Mit (1.32) lassen sich nun die Eigenfunktionen $\overset{m}{\varphi}_k$
von den Zeitfunktionen τ_k trennen.

$$\overset{m}{\varphi}_k''(z) + \overset{m}{\kappa}_k^2 \overset{m}{\varphi}_k(z) = 0 \quad (1.33)$$

Mit $\overset{m}{\kappa}_k^2 = \omega_k / \overset{m}{a}$ (1.34)

Als Lösung läßt sich sofort elementar angeben:

$$\overset{m}{\varphi}_k(z) = \overset{m}{A}_k \sin(\overset{m}{\kappa}_k z) + \overset{m}{B}_k \cos(\overset{m}{\kappa}_k z) \quad (1.35)$$

sowie

$$\overset{m}{\varphi}_k'(z) = \overset{m}{\kappa}_k [\overset{m}{A}_k \cos(\overset{m}{\kappa}_k z) - \overset{m}{B}_k \sin(\overset{m}{\kappa}_k z)] \quad (1.36)$$

Damit

Randbedingung innen (1.13):

$$\overset{1}{\lambda} \overset{1}{\varphi}_k'(z=0) = \alpha_1 \overset{1}{\varphi}_k(z=0)$$

mit (1.35) und (1.36)

$$\begin{aligned} \kappa_k^1 \lambda^1 [A_k^1 \cos(\kappa_k^1 \cdot 0) - B_k^1 \cdot 0] &= \alpha_i [A_k^1 \cdot 0 + B_k^1 \cos(\kappa_k^1 \cdot 0)] \\ A_k^1 \{1\} - B_k^1 \left\{ \frac{\alpha_i}{\kappa_k^1 \lambda} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

m-te Übergangsbedingung Wärmestrom (1.28):

$$\begin{aligned} \lambda^m \varphi_k^m(z=s) &= \lambda^{m+1} \varphi_k^{m+1}(z=0) \\ \lambda^m \kappa_k^m [A_k^m \cos(\kappa_k^m s) - B_k^m \sin(\kappa_k^m s)] &= \lambda^{m+1} \kappa_k^{m+1} [A_k^{m+1} \cos(\kappa_k^{m+1} \cdot 0) - B_k^{m+1} \cdot 0] \\ A_k^m \{\cos(\kappa_k^m s)\} - B_k^m \{\sin(\kappa_k^m s)\} - A_k^{m+1} \left\{ \frac{\lambda^m \kappa_k^m}{\lambda^{m+1} \kappa_k^{m+1}} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

m-te Übergangsbedingung Temperatur (1.29):

$$\begin{aligned} \varphi_k^m(z=s) &= \varphi_k^{m+1}(z=0) \\ A_k^m \sin(\kappa_k^m s) + B_k^m \cos(\kappa_k^m s) &= A_k^{m+1} \sin(\kappa_k^{m+1} \cdot 0) + B_k^{m+1} \cos(\kappa_k^{m+1} \cdot 0) \\ A_k^m \{\sin(\kappa_k^m s)\} + B_k^m \{\cos(\kappa_k^m s)\} - B_k^{m+1} \{1\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Randbedingung außen (1.16):

$$\begin{aligned} \lambda^{\hat{n}} \varphi_k^{\hat{n}}(z=s) &= -\alpha_a \varphi_k^{\hat{n}}(z=0) \\ \lambda^{\hat{n}} \kappa_k^{\hat{n}} [A_k^{\hat{n}} \cos(\kappa_k^{\hat{n}} s) - B_k^{\hat{n}} \sin(\kappa_k^{\hat{n}} s)] &= -\alpha_a [A_k^{\hat{n}} \sin(\kappa_k^{\hat{n}} \cdot 0) + B_k^{\hat{n}} \cos(\kappa_k^{\hat{n}} \cdot 0)] \\ A_k^{\hat{n}} \{\lambda^{\hat{n}} \kappa_k^{\hat{n}} \cos(\kappa_k^{\hat{n}} s) + \alpha_a \sin(\kappa_k^{\hat{n}} s)\} + B_k^{\hat{n}} \{-\lambda^{\hat{n}} \kappa_k^{\hat{n}} \sin(\kappa_k^{\hat{n}} s) + \alpha_a \cos(\kappa_k^{\hat{n}} s)\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Die angegebenen Bedingungen lassen sich nun in einer Matrix (Bild 3) zusammenfassen. Da es sich hier ausschließlich um homogene Gleichungen handelt, d.h. die "rechte Seite" gleich Null ist, existieren nur dann nichttriviale Lösungen, wenn der Wert der Determinante zu Null wird.

Jeder "Schichteigenwert" κ_k^m läßt sich durch den Eigenwert ω_k über die Beziehung (1.34)

$$\kappa_k^2 = \omega_k / a$$

ausdrücken, so daß die Lösung sich beispielsweise mit Hilfe einer Newton-Iteration angeben läßt.

Nähere Informationen dazu sind im Kapitel 4.2.1 zu finden.

$^1 A_k$	$^1 B_k$	$^a A_k$	$^a B_k$	$^{m-1} A_k$	$^{m-1} B_k$	$^n A_k$	$^n B_k$	IR
1	$-\frac{\alpha_1}{\lambda \kappa_k}$	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\cos(\kappa_k^m s)$	$-\sin(\kappa_k^m s)$	$-\frac{m-1}{\lambda \kappa_k}$	0	0	0	0
0	0	$\sin(\kappa_k^m s)$	$\cos(\kappa_k^m s)$	0	-1	0	0	0
0	0					0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\lambda \kappa_k \cos(\kappa_k^n s)$ $+ \alpha_2 \sin(\kappa_k^n s)$	$-\lambda \kappa_k \sin(\kappa_k^n s)$ $+ \alpha_2 \cos(\kappa_k^n s)$	0

$$\kappa_k^a = \sqrt{\omega_k / a} \tag{1.41}$$

Bild 3: Homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenwerte

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten, da das System überbestimmt ist, willkürlich gesetzt:

$$^1 A_k = 1 \tag{1.42}$$

daraus folgt:

$${}^1 B_k = \frac{1}{\alpha_i} \sqrt{\omega_k / a} \quad (1.43)$$

Für $m = 2$:

$${}^2 B_k = \sin(\sqrt{\omega_k / a} s) + \frac{1}{\alpha_i} \sqrt{\omega_k / a} \cos(\sqrt{\omega_k / a} s) \quad (1.44)$$

$${}^2 A_k = \frac{1}{2} \frac{\lambda \sqrt{\omega_k / a}}{\lambda \sqrt{\omega_k / a}} [\cos(\sqrt{\omega_k / a} s) - \frac{1}{\alpha_i} \sqrt{\omega_k / a} \sin(\sqrt{\omega_k / a} s)] \quad (1.45)$$

für m ($2 \leq m \leq n$):

$${}^{m+1} B_k = \sin(\sqrt{\omega_k / a} s) {}^m A_k + \cos(\sqrt{\omega_k / a} s) {}^m B_k \quad (1.46)$$

$${}^{m+1} A_k = \frac{\lambda \sqrt{\omega_k / a}}{\lambda \sqrt{\omega_k / a}} [\cos(\sqrt{\omega_k / a} s) {}^m A_k - \sin(\sqrt{\omega_k / a} s) {}^m B_k] \quad (1.47)$$

Damit sind die Eigenfunktionen $\varphi_k^{(m)}(z)$ aller n Wandschichten bekannt.

1.2.2 Lösung der Zeitfunktionen

Mit (1.30) läßt sich die Differentialgleichung (1.26) für die m -te Schicht angeben zu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ \varphi_k^{(m)}(z) \tau_k^{(m)}(t) - a \varphi_k^{(m)}(z) \tau_k^{(m)}(t) \} = -\dot{T} \quad (1.48)$$

Betrachtet man die gesamte n -schichtige Konstruktion und wendet das Prinzip der virtuellen Verrückung an, indem (1.48) mit der Eigenfunktion $\varphi_i^{(m)}(z)$ multipliziert und über die Schichtdicke s integriert wird, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ \sum_{m=1}^n \tau_k^{(m)} \int_0^s \varphi_k^{(m)} \varphi_i^{(m)} dz - a \tau_k^{(m)} \int_0^s \varphi_k^{(m)} \varphi_i^{(m)} dz \} = - \sum_{m=1}^n \int_0^s \dot{T} \varphi_i^{(m)} dz \quad (1.49)$$

Somit ein unendliches Gleichungssystem für die Unbekannten τ_k

1.2.2.1 Orthogonalitätsbedingungen

Die homogene Differentialgleichung des Eigenwertproblems (1.33) für die m -te Schicht

$$\varphi_k^{(m)}(z) + \kappa_k^2 \varphi_k^{(m)}(z) = 0$$

wird von den (bereits bestimmten) Eigenfunktionen $\varphi_k^{(m)}(z)$ erfüllt.

Multiplikation mit der i-ten Eigenfunktion $\varphi_i^m(z)$
und Integration über alle Schichtdicken liefert:

$$\sum_{m=1}^n \int_0^s \varphi_k^m \varphi_i^m dz + \kappa_2 \int_0^s \varphi_k^m \varphi_i^m dz = 0 \quad (1.50)$$

In diese Gleichung müssen nun für die entsprechenden Schichten die bereits formulierten Rand- bzw. Übergangsbedingungen eingebaut werden.

Da die Eigenfunktionen an den Schichtgrenzen infolge der unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten eine unstetige erste Ableitung besitzen (aus (1.28))

$$\lambda \varphi_k^m(z=s) = \lambda \varphi_k^m(z=0) \quad (1.51)$$

wird (1.50) mit dem Faktor λ multipliziert.

Schicht 1:

$$\lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz = \lambda \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) \Big|_0^1 - \lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz$$

$$= \lambda \varphi_k^1(s) \varphi_i^1(s) - \lambda \varphi_k^1(0) \varphi_i^1(0) - \lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz$$

$$\varphi_k^1(0) = \frac{\alpha_i}{\lambda} \varphi_k^1(0) \quad \text{aus (1.13)}$$

$$\varphi_k^1(s) = \frac{2}{\lambda} \varphi_k^2(0) \quad \text{aus (1.28)}$$

$$\varphi_k^1(s) = \varphi_k^2(0) \quad \text{aus (1.29)}$$

$$\lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz = \frac{2}{\lambda} \varphi_k^2(0) \varphi_i^1(0) - \alpha_i \varphi_k^1(0) \varphi_i^1(0) - \lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz \quad (1.52)$$

Schicht m:

$$\lambda \int_0^s \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = \lambda \left(\varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) \Big|_0^s - \int_0^s \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz \right)$$

$$= \lambda \left(\varphi_k^m(s) \varphi_i^m(s) - \varphi_k^m(0) \varphi_i^m(0) - \int_0^s \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz \right)$$

$$\varphi_k^m(s) = \frac{m+1}{\lambda} \varphi_k^{m+1}(0) \quad \text{aus (1.28)}$$

$$\varphi_i^m(s) = \varphi_i^{m+1}(0) \quad \text{aus (1.29)}$$

$$\lambda \int_0^s \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = \frac{m+1}{\lambda} \varphi_k^{m+1}(0) \varphi_i^{m+1}(0) - \lambda \varphi_k^m(0) \varphi_i^m(0) - \lambda \int_0^s \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz \quad (1.53)$$

Schicht n:

$$\lambda \int_0^1 \varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) dz = \lambda \left(\varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) dz \right)$$

$$= \lambda \left(\varphi_k^n(s) \varphi_i^n(s) - \varphi_k^n(0) \varphi_i^n(0) - \int_0^1 \varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) dz \right)$$

$$\varphi_k^n(s) = -\frac{\alpha_n}{\lambda} \varphi_k^n(s) \quad \text{aus (1.16)}$$

$$\lambda \int_0^1 \varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) dz = -\alpha_n \varphi_k^n(s) \varphi_i^n(s) - \lambda \varphi_k^n(0) \varphi_i^n(0) - \lambda \int_0^1 \varphi_k^n(z) \varphi_i^n(z) dz \quad (1.54)$$

Zusammenfassung:

((1.52), (1.53), (1.54) in (1.50) eingesetzt)

$$\begin{aligned}
 & \lambda^2 \varphi_k^2(0) \varphi_i^2(0) - \alpha_i \varphi_k^1(0) \varphi_i^1(0) - \lambda \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz \\
 & + \dots \\
 & + \lambda^{m+1} \varphi_k^{m+1}(0) \varphi_i^{m+1}(0) - \lambda^m \varphi_k^m(0) \varphi_i^m(0) - \lambda \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz \\
 & + \dots \\
 & - \alpha_a \hat{\varphi}_k^n(\hat{s}) \hat{\varphi}_i^n(\hat{s}) - \hat{\lambda} \hat{\varphi}_k^n(0) \hat{\varphi}_i^n(0) - \hat{\lambda} \int_0^{\hat{s}} \hat{\varphi}_k^n(z) \hat{\varphi}_i^n(z) dz \\
 & + \lambda^1 \kappa_k^2 \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz + \dots + \lambda^m \kappa_k^2 \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz + \dots + \lambda^{\hat{n}} \kappa_k^2 \int_0^{\hat{s}} \hat{\varphi}_k^{\hat{n}}(z) \hat{\varphi}_i^{\hat{n}}(z) dz = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

Gleicher Vorgang, jedoch mit Vertauschen der Indizes liefert (analog zu (1.55))

$$\begin{aligned}
 & \lambda^2 \varphi_i^2(0) \varphi_k^2(0) - \alpha_k \varphi_i^1(0) \varphi_k^1(0) - \lambda \int_0^1 \varphi_i^1(z) \varphi_k^1(z) dz \\
 & + \dots \\
 & + \lambda^{m+1} \varphi_i^{m+1}(0) \varphi_k^{m+1}(0) - \lambda^m \varphi_i^m(0) \varphi_k^m(0) - \lambda \int_0^m \varphi_i^m(z) \varphi_k^m(z) dz \\
 & + \dots \\
 & - \alpha_a \hat{\varphi}_i^n(\hat{s}) \hat{\varphi}_k^n(\hat{s}) - \hat{\lambda} \hat{\varphi}_i^n(0) \hat{\varphi}_k^n(0) - \hat{\lambda} \int_0^{\hat{s}} \hat{\varphi}_i^n(z) \hat{\varphi}_k^n(z) dz \\
 & + \lambda^1 \kappa_i^2 \int_0^1 \varphi_i^1(z) \varphi_k^1(z) dz + \dots + \lambda^m \kappa_i^2 \int_0^m \varphi_i^m(z) \varphi_k^m(z) dz + \dots + \lambda^{\hat{n}} \kappa_i^2 \int_0^{\hat{s}} \hat{\varphi}_i^{\hat{n}}(z) \hat{\varphi}_k^{\hat{n}}(z) dz = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

Subtraktion der Ausdrücke:

(1.55) - (1.56)

$$\begin{aligned}
 & \lambda^2 [\varphi_k^2(0) \varphi_i^2(0) - \varphi_i^2(0) \varphi_k^2(0)] \\
 & \dots \\
 & + \lambda^{m+1} [\varphi_k^{m+1}(0) \varphi_i^{m+1}(0) - \varphi_i^{m+1}(0) \varphi_k^{m+1}(0)] \\
 & \dots \\
 & - \hat{\lambda}^m [\hat{\varphi}_k^m(0) \hat{\varphi}_i^m(0) - \hat{\varphi}_i^m(0) \hat{\varphi}_k^m(0)] \\
 & \dots \\
 & - \hat{\lambda}^{\hat{n}} [\hat{\varphi}_k^{\hat{n}}(0) \hat{\varphi}_i^{\hat{n}}(0) - \hat{\varphi}_i^{\hat{n}}(0) \hat{\varphi}_k^{\hat{n}}(0)] \\
 & + \lambda^1 (\kappa_k^2 - \kappa_i^2) \cdot \int_0^1 \varphi_k^1(z) \varphi_i^1(z) dz \\
 & + \dots \\
 & + \lambda^m (\kappa_k^2 - \kappa_i^2) \cdot \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz \\
 & + \dots \\
 & + \hat{\lambda}^{\hat{n}} (\kappa_k^2 - \kappa_i^2) \cdot \int_0^{\hat{s}} \hat{\varphi}_k^{\hat{n}}(z) \hat{\varphi}_i^{\hat{n}}(z) dz = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.57}$$

Wie sich leicht ersehen läßt, verschwinden sämtliche Ausdrücke, welche nicht mit x behaftet sind.

Demnach kann (1.57) nur erfüllt werden, wenn:

$$\int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = 0 \quad (1.58)$$

für $i \neq k$ und $1 \leq m \leq n$

In (1.50) eingesetzt:

$$\int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = 0 \quad (1.59)$$

für $i \neq k$ und $1 \leq m \leq n$

Mit Hilfe der nun gewonnenen Orthogonalitätsbedingungen (1.58) und (1.59) läßt sich das Differentialgleichungssystem (1.49) jetzt lediglich als eine Differentialgleichung für die unbekanntenen Zeitfunktionen angeben:

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \dot{\tau}_k(t) \int_0^m \varphi_k^m(z) dz - a \tau_k(t) \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_k^m(z) dz \right\} = - \sum_{m=1}^n \int_0^m \ddot{T} \varphi_k^m(z) dz \quad (1.60)$$

Wie sich aus (1.35) sofort ersehen läßt, besteht mit (1.34) die Beziehung

$$\varphi_k^m(z) = -\chi_k^m \varphi_k^m(z) = -\frac{\omega_k}{a} \varphi_k^m(z) \quad (1.61)$$

damit (1.60):

$$\dot{\tau}_k(t) \left\{ \sum_{m=1}^n \int_0^m \varphi_k^m(z) dz \right\} + \omega_k \tau_k(t) \left\{ \sum_{m=1}^n \int_0^m \varphi_k^m(z) dz \right\} = - \sum_{m=1}^n \int_0^m \ddot{T} \varphi_k^m(z) dz \quad (1.62)$$

nach Umformung:

$$\dot{\tau}_k(t) + \omega_k \tau_k(t) = \frac{- \sum_{m=1}^n \int_0^m \ddot{T}(z,t) \varphi_k^m(z) dz}{\sum_{m=1}^n \int_0^m \varphi_k^m(z) dz} \quad (1.63)$$

1.2.2.2 Homogene Lösung der Zeit-Differentialgleichung

Die homogene Differentialgleichung aus (1.63) bzw. (1.32)

$$\dot{\tau}_k(t) + \omega_k \tau_k(t) = 0 \quad (1.64)$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$\tau_k^h(t) = D_k e^{-\omega_k t} \quad (1.65)$$

1.2.2.3 Spezielle Lösung der Zeit-Differentialgleichung

Mit der Abkürzung

$$\sigma_k(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \int_0^m \dot{\tau}^m(z, t) \varphi_k^m(z) dz}{\sum_{m=1}^n \int_0^m \varphi_k^m(z) dz} \quad (1.66)$$

lautet die inhomogene Differentialgleichung (1.63):

$$\dot{\tau}_k(t) + \omega_k \tau_k(t) = \sigma_k(t) \quad (1.67)$$

Als Lösungsansatz hierfür wird gewählt

$$\tau_k^s(t) = \theta_k(t) \Phi_k(t) \quad (1.68)$$

damit

$$\dot{\tau}_k^s(t) = \dot{\theta}_k(t) \Phi_k(t) + \theta_k(t) \dot{\Phi}_k(t) \quad (1.69)$$

(1.69) in (1.67):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_k(t) \Phi_k(t) + \theta_k(t) \dot{\Phi}_k(t) + \omega_k \theta_k(t) \Phi_k(t) &= \sigma_k(t) \\ \dot{\theta}_k(t) \Phi_k(t) + \theta_k(t) [\dot{\Phi}_k(t) + \omega_k \Phi_k(t)] &= \sigma_k(t) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Mit

$$\Phi_k(t) = e^{-\omega_k t} \quad (1.71)$$

folgt

$$\dot{\theta}_k(t) + \omega_k \theta_k(t) = 0$$

damit (1.70) zu:

$$\dot{\theta}_k(t) e^{-\omega_k t} = \sigma_k(t) \quad (1.72)$$

$$\dot{\theta}_k(t) = \sigma_k(t) e^{\omega_k t}$$

$$\theta_k(t) = \int_0^t \sigma_k^*(t) e^{\omega_k t} dt^* \quad (1.73)$$

mit t^* als Laufvariable

Somit die spezielle Lösung (1.68)

$$\tau_k^s(t) = \theta_k(t) e^{-\omega_k t} \quad (1.74)$$

und die allgemeine Lösung für $\tau_k(t)$

$$\tau_k(t) = \tau_k^h(t) + \tau_k^s(t) \quad (1.75)$$

Nach Einsetzen von (1.65) und (1.74):

$$\tau_k(t) = D_k e^{-\omega_k t} + e^{-\omega_k t} \theta_k(t)$$

mit (1.73)

$$\tau_k(t) = e^{-\omega_k t} [D_k + \theta_k(t)] = e^{-\omega_k t} [D_k + \int_0^t \sigma_k(t^*) e^{\omega_k t^*} dt^*] \quad (1.76)$$

1.2.2.4 Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung

Die in (1.76) enthaltene unbekannte Integrationskonstante D_k muß nun aus der Anfangsbedingung bestimmt werden.

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ sei in jeder Schicht eine beliebige Anfangstemperatur der Form

$$\bar{T}(z, t_0) = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 z - \frac{\mathfrak{Q}_0}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2$$

vorgegeben. Die Anfangsbedingung (1.27) lautet nach Einsetzen von (1.20):

$$\bar{T}(z, t_0) = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 z - \frac{\mathfrak{Q}_0}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2 - \{ \bar{C}_0(t_0) + \bar{C}_1(t_0) z - \frac{\bar{Q}(t_0)}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2 \} \quad (1.77)$$

Um später einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, muß dieser Ausdruck in Reihenschreibweise überführt werden. Als Näherungsfunktion wird gewählt

$$\bar{f}(z, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z) \quad (1.78)$$

mit δ_k^m als (noch unbekannt) Koeffizienten in der m-ten Schicht

und $\varphi_k^m(z)$ als (bereits bestimmte) Eigenfunktionen

Nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$M = \int_0^s [\bar{T}(z, t_0) - \bar{f}(z, t_0)]^2 dz \Rightarrow \text{Minimum!}$$

$$M = \int_0^s [\bar{T}(z, t_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z)]^2 dz$$

$$\frac{\partial M}{\partial \delta_i} = 2 \int_0^m \tilde{T}(z, t_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = 0$$

$$\int_0^m \tilde{T}(z, t_0) \varphi_i^m(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz$$

Da, nach (1.58) für $i \neq k$

$$\int_0^m \varphi_k^m(z) \varphi_i^m(z) dz = 0$$

folgt:

$$\int_0^m \tilde{T}(z, t_0) \varphi_k^m(z) dz = \delta_k^m \int_0^m \varphi_k^m(z) dz$$

damit

$$\delta_k^m = \frac{\int_0^m \tilde{T}(z, t_0) \varphi_k^m(z) dz}{\int_0^m \varphi_k^m(z) dz} \quad (1.79)$$

Mit (1.77)

$$\delta_k^m = \frac{[\vartheta_0^m - C_0^m(t_0) - (Q_0^m - Q(t_0)) \frac{s_0^m}{8}] \int_0^m \varphi_k^m(z) dz}{\int_0^m \varphi_k^m(z) dz} + \frac{[\vartheta_1^m - C_1^m(t_0) + (Q_0^m - Q(t_0)) \frac{s_0^m}{2}] \int_0^m z \varphi_k^m(z) dz}{\int_0^m \varphi_k^m(z) dz} - \frac{(Q_0^m - Q(t_0)) \frac{1}{2} \int_0^m z^2 \varphi_k^m(z) dz}{\int_0^m \varphi_k^m(z) dz} \quad (1.80)$$

Die in obiger Formel enthaltenen Integrale lassen sich mit (1.35) wie folgt lösen:

$$\Psi_{0k}^m = \int_0^m \varphi_k^m(z) dz$$

$$\Psi_{0k}^m = \int_0^m [A_k^m \sin(\kappa_k^m z) + B_k^m \cos(\kappa_k^m z)] dz$$

$$\Psi_{0k}^m = \frac{1}{\kappa_k^m} [B_k^m \sin(\kappa_k^m s) - A_k^m (\cos(\kappa_k^m s) - 1)] \quad (1.81)$$

$$\Psi_k^m = \int_0^s z \varphi_k^m(z) dz$$

$$\Psi_k^m = \int_0^s z [A_k \sin(x_k z) + B_k \cos(x_k z)] dz$$

$$\Psi_k^m = \frac{1}{x_k} \left\{ A_k \left[\frac{\sin(x_k s)}{x_k} - s \cos(x_k s) \right] + B_k \left[\frac{\cos(x_k s) - 1}{x_k} + s \sin(x_k s) \right] \right\} \quad (1.82)$$

$$\Psi_{2k}^m = \int_0^s z^2 \varphi_k^m(z) dz$$

$$\Psi_{2k}^m = \int_0^s z^2 (A_k \sin(x_k z) + B_k \cos(x_k z)) dz$$

$$\Psi_{2k}^m = \frac{2}{x_k} \left\{ A_k \left(\frac{s}{x_k} \sin(x_k s) - \frac{s^2 x_k - 2}{2 x_k^2} \cos(x_k s) - \frac{1}{x_k^2} \right) + B_k \left(\frac{s}{x_k} \cos(x_k s) + \frac{s^2 x_k - 2}{2 x_k^2} \sin(x_k s) \right) \right\} \quad (1.83)$$

$$\Psi_{3k}^m = \int_0^s z^3 \varphi_k^m(z) dz$$

$$\Psi_{3k}^m = \int_0^s [A_k \sin(x_k z) + B_k \cos(x_k z)] z^3 dz$$

$$\Psi_{3k}^m = \frac{1}{2 x_k} \left\{ A_k^2 \left(s x_k - \frac{\sin(2 x_k s)}{2} \right) + 2 A_k B_k \sin(x_k s) + B_k^2 \left(s x_k + \frac{\sin(2 x_k s)}{2} \right) \right\} \quad (1.84)$$

Mit

$$\Psi_{4k}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{4} \Psi_{0k}^m - s \Psi_{1k}^m + \Psi_{2k}^m \right) \quad (1.85)$$

läßt sich (1.80) endgültig angeben

$$\delta_k^m = \frac{(\mathcal{S}_0 - \mathcal{C}_0(t)) \Psi_{0k}^m + (\mathcal{S}_1 - \mathcal{C}_1(t)) \Psi_{1k}^m - (\mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}(t)) \Psi_{4k}^m}{\Psi_{3k}^m} \quad (1.86)$$

Zur Bestimmung der konstanten D_k läßt sich der Entwicklungssatz (1.30)

$$\tilde{T}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) \tau_k^m(t)$$

heranziehen. Wie gezeigt, lautet für die Anfangsbedingung (1.77) die Näherung (1.78)

$$\tilde{T}(z, t_0) = \tilde{f}(z, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z)$$

Für den Zeitpunkt $t = t_0$ somit

$$\bar{T}(z, t = t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) \tau_k(t = t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z)$$

Mit (1.76) für $\tau_k(t = t_0)$

$$\bar{T}(z, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) e^{-\omega_k t_0} \left[D_k + \int_0^{t_0} \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^m \varphi_k^m(z)$$

Aus Koeffizientenvergleich

$$D_k = e^{\omega_k t_0} \delta_k - \int_0^{t_0} \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \quad (1.87)$$

Die dynamische Lösung läßt sich nun, unter Einbeziehung der konstanten D_k aus der Anfangsbedingung, entscheidend vereinfachen. Mit (1.76) lautet sie

$$\bar{T}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) e^{-\omega_k t} \left(D_k + \int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right)$$

Nach Einsetzen von (1.86)

$$\bar{T}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) e^{-\omega_k t} \left(e^{\omega_k t_0} \delta_k - \int_0^{t_0} \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt + \int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right)$$

Da $t \geq t_0$ und $0 \leq t_0$

$$\bar{T}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) \left\{ \delta_k e^{-\omega_k(t-t_0)} + e^{-\omega_k t} \int_0^{t_0} \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right\} \quad (1.88)$$

Das obige Integral kann nun weiter ausgewertet werden.

Nach (1.66):

$$\sigma_k(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \int_0^{\dot{s}_m} \bar{T}(z, t) \varphi_k^m(z) dz}{\sum_{m=1}^n \int_0^{\dot{s}_m} \varphi_k^{m,2}(z) dz}$$

Der Nenner dieses Bruches wurde bereits gelöst (1.84)

Der Zähler läßt sich mit

$$\dot{T}(z, t) = \dot{C}_0(t) + \dot{C}_1(t)z - \frac{\dot{Q}(t)}{2} \left(z^2 - sz + \frac{s^2}{4} \right)$$

anschreiben

$$\dot{Z}_k = \int_0^s [\dot{C}_0(t) + \dot{C}_1(t)z - \frac{\dot{Q}(t)}{2} \left(z^2 - sz + \frac{s^2}{4} \right)] \dot{\varphi}_k(z) dz$$

Nach kurzer Zwischenrechnung

$$\dot{Z}_k = \left(\dot{C}_0(t) - \dot{Q}(t) \frac{s^2}{8} \right) \dot{\psi}_{0k} + \left(\dot{C}_1(t) + \dot{Q}(t) \frac{s}{2} \right) \dot{\psi}_{1k} - \frac{\dot{Q}(t)}{2} \dot{\psi}_{2k}$$

Damit

$$\alpha_k(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \left\{ \left(\dot{C}_0(t) - \dot{Q}(t) \frac{s^2}{8} \right) \dot{\psi}_{0k} + \left(\dot{C}_1(t) + \dot{Q}(t) \frac{s}{2} \right) \dot{\psi}_{1k} - \dot{Q}(t) \frac{1}{2} \dot{\psi}_{2k} \right\}}{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{3k}}$$

Mit (1.85)

$$\alpha_k(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \{ \dot{C}_0(t) \dot{\psi}_{0k} + \dot{C}_1(t) \dot{\psi}_{1k} - \dot{Q}(t) \dot{\psi}_{2k} \}}{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{3k}} \quad (1.89)$$

Nun ist es möglich, das Zeitintegral aus (1.88) in einfacher Form anzugeben

$$\int_{t_0}^t \alpha_k(t) e^{\omega_k t} dt = \frac{-\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{0k} \int_{t_0}^t \dot{C}_0(t) e^{\omega_k t} dt}{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{3k}} - \frac{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{1k} \int_{t_0}^t \dot{C}_1(t) e^{\omega_k t} dt}{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{3k}} + \frac{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{2k} \int_{t_0}^t \dot{Q}(t) e^{\omega_k t} dt}{\sum_{m=1}^n \dot{\psi}_{3k}}$$

Nach partieller Integration

$$\int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt = \frac{-\sum_{m=1}^n \Psi_{0k}^m \{C_0(t) e^{\omega_k t} - C_0(t_0) e^{\omega_k t_0} - \omega_k \int_{t_0}^t C_0(t) e^{\omega_k t} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m} + \frac{\sum_{m=1}^n \Psi_{1k}^m \{C_1(t) e^{\omega_k t} - C_1(t_0) e^{\omega_k t_0} - \omega_k \int_{t_0}^t C_1(t) e^{\omega_k t} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m} + \frac{\sum_{m=1}^n \Psi_{2k}^m \{Q(t) e^{\omega_k t} - Q(t_0) e^{\omega_k t_0} - \omega_k \int_{t_0}^t Q(t) e^{\omega_k t} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m} \quad (1.90)$$

Damit folgt

$$\tau_k(t) = e^{-\omega_k t} \left[D_k + \int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right]$$

$$\tau_k(t) = e^{-\omega_k t} \left[e^{\omega_k t_0} \delta_k - \int_0^{t_0} \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt + \int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt \right]$$

$$\tau_k(t) = \delta_k e^{-\omega_k(t-t_0)} + e^{-\omega_k t} \int_{t_0}^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt$$

Als Abkürzung wird gewählt:

$$\hat{\tau}_k(t) = e^{-\omega_k t} \int_0^t \sigma_k(t) e^{\omega_k t} dt$$

$$\hat{\tau}_k(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \Psi_{0k}^m \{C_0(t) - C_0(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t C_0(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m}$$

$$\frac{\sum_{m=1}^n \Psi_{1k}^m \{C_1(t) - C_1(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t C_1(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m}$$

$$+ \frac{\sum_{m=1}^n \Psi_{2k}^m \{Q(t) - Q(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t Q(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt\}}{\sum_{m=1}^n \Psi_{3k}^m} \quad (1.91)$$

Dieser Ausdruck kann anschaulich als Temperaturgedächtnis gedeutet werden, da sämtliche Informationen, ausgehend vom Anfangszeitpunkt, in ihm gespeichert sind.

Für die dynamische Lösung ergibt sich somit

$$\tilde{T}(z, t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(z) \left\{ \delta_k e^{-\omega_k(t-t_0)} + \hat{\tau}_k(t) \right\} \quad (1.92)$$

Die endgültige Lösung für den eindimensionalen Temperaturverlauf in mehrschichtigen Bauteilen läßt sich für die m-te Schicht in geschlossener Weise anschreiben:

$$T^m(z, t) = \bar{T}^m(z, t) + \hat{T}^m(z, t)$$

$$T^m(z, t) = \bar{C}_0^m(t) + \bar{C}_1^m(t)z - \bar{Q}^m(t) \frac{(z - \frac{s}{2})^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^m(z) (\delta_k^m e^{-\omega_k(t-t_0)} + \hat{T}_k^m(t)) \quad (1.93)$$

Mit $\bar{C}_0^m(t), \bar{C}_1^m(t)$ als stationäre Lösung zum Zeitpunkt t (nach (1.25))

$$\bar{Q}^m(t) = \frac{\bar{q}^m(t)}{\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{innere Wärmequelle} \\ \text{(zeitlich beliebig)} \end{array}$$

$$\varphi_k^m(z) = A_k^m \sin(x_k z) + B_k^m \cos(x_k z)$$

als k-te Eigenfunktion mit dem Eigenwert x_k nach (1.41)

$$\omega_k = x_k^2 \lambda / (\rho C)$$

und

$$\delta_k^m = \frac{(\bar{q}_0^m - \bar{C}_0^m(t_0)) \psi_{0k}^m + (\bar{q}_1^m - \bar{C}_1^m(t_0)) \psi_{1k}^m - (\bar{Q}_0^m - \bar{Q}^m(t_0)) \psi_{4k}^m}{\psi_{3k}^m}$$

als Näherung für die Anfangstemperatur nach (1.86), wobei die Anfangstemperatur in der Form

$$T^m(z, t=t_0) = \bar{q}_0^m + \bar{q}_1^m z - \bar{Q}_0^m (z - \frac{s}{2})^2 / 2$$

gegeben ist, sowie dem Temperaturgedächtnis

$$\hat{T}_k^m(t) = \frac{-\sum_{m=1}^n \psi_{0k}^m \{ \bar{C}_0^m(t) - \bar{C}_0^m(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t \bar{C}_0^m(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt \}}{\sum_{m=1}^n \psi_{3k}^m}$$

$$\frac{\sum_{m=1}^n \psi_{1k}^m \{ \bar{C}_1^m(t) - \bar{C}_1^m(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t \bar{C}_1^m(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt \}}{\sum_{m=1}^n \psi_{3k}^m}$$

$$+ \frac{\sum_{m=1}^n \psi_{4k}^m \{ \bar{Q}^m(t) - \bar{Q}^m(t_0) e^{-\omega_k(t-t_0)} - \omega_k \int_{t_0}^t \bar{Q}^m(t) e^{-\omega_k(t-t)} dt \}}{\sum_{m=1}^n \psi_{3k}^m}$$

nach (1.91) mit (1.81) bis (1.85)

2. Instationärer Temperaturverlauf in zweidimensionalen einschichtigen Bauteilen

Aus der Literatur [4] ist bekannt, daß sich für homogene, symmetrische, mehrdimensionale Körper die Temperaturverteilung aus der Superposition der entsprechenden eindimensionalen Lösungsformen ergibt. Voraussetzung der üblichen Verfahren ist die Einführung dimensionsloser Temperaturen; dies hat zum Gebrauch der Fourier- bzw. Biot-Zahlen geführt.

In der vorliegenden Arbeit soll in Anlehnung an die oben geschilderte Vorgehensweise anstelle der dimensionslosen Betrachtung eine dimensionsbehaftete Bezugstemperatur eingeführt werden, so daß die Einzellösungen in der "Originalform" belassen bleiben.

Die Bezugstemperatur T_B muß aus einem bekannten Temperaturverlauf bestimmt werden. Zweckmäßigerweise wählt man die (ohnehin bekannte) Anfangstemperatur

$$T_B = \overset{0}{T} = T(x, y, t = t_0) \tag{2.1}$$

Nachfolgend soll gezeigt werden, daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \tag{2.2}$$

mit dem Lösungsansatz:

$$T(x, y, t) = T(x, t) \cdot T(y, t) \cdot \frac{1}{T_B} \tag{2.3}$$

erfüllt wird, wobei $T(x, t)$ bzw. $T(y, t)$ die bekannte eindimensionale, einschichtige Temperaturlösung gemäß Ziffer 1 und T_B die bereits erläuterte Bezugstemperatur ist.

Mit (2.3) kann man den linken Teil von (2.2) angeben

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{T_B} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \cdot T(y, t) + \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} \cdot T(x, t) \right) \tag{2.4}$$

Hierin erfüllt gemäß (1.1), (ohne Wärmequelle)

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

und

$$\frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2} \tag{2.6}$$

so daß nach Einsetzen von (2.5) und (2.6) in (2.4)

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{1}{T_B} \left[\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \cdot T(y,t) + \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} \cdot T(x,t) \right]$$

und nach Umformung

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{1}{T_B} \left[\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \cdot T(y,t) + \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} \cdot T(x,t) \right) \right] \quad (2.7)$$

Die "rechte Seite" von (2.2) ergibt sich zu

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \cdot T(y,t) \cdot \frac{1}{T_B} + \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} \cdot T(x,t) \cdot \frac{1}{T_B} \right) \quad (2.8)$$

Es ist sofort ersichtlich, daß die umgeformten linken und rechten Seiten von (2.2), also (2.7) und (2.8), identisch sind.

Der Lösungsansatz (2.3) ist damit bestätigt.

Die Randbedingungen sind gemäß Ziffer 1 anzusetzen. Es besteht somit die Möglichkeit, für alle vier Ränder zeitlich variable Temperaturen und Wärmeströme sowie unterschiedliche Wärmeübergangswerte α anzusetzen.

Falls die Anfangstemperatur zu Null wird, kann die vorgeschlagene Lösungsmöglichkeit nicht zum Erfolg führen. Es empfiehlt sich, in solchen Fällen folgendermaßen vorzugehen.

Handelt es sich um Aufheiz- bzw. Abkühlungs-Vorgänge mit bekannter Endtemperatur, so läßt sich der Lösungsansatz in der Form

$$T(x,y,t) = T_E - \frac{(T_E - T(x,t)) \cdot (T_E - T(y,t))}{T_E} \quad (2.9)$$

angeben, wobei T_E die End-Temperatur ist.

Die nachfolgenden Grenzwertbetrachtungen bestätigen diesen Ansatz.

$$t = 0: T(x,t) = T(y,t) = 0$$

$$T(x,y,t) = T_E - \frac{(T_E - 0) \cdot (T_E - 0)}{T_E} = T_E - \frac{T_E^2}{T_E} = 0$$

$$t \rightarrow \infty: T(x,t) = T(y,t) = T_E$$

$$T(x,y,t) = T_E - \frac{(T_E - T_E) \cdot (T_E - T_E)}{T_E} = T_E$$

Bei dynamischen Vorgängen, wo keine Angabe über eine End-Temperatur getroffen werden kann und die Anfangs-Temperatur identisch Null ist, erscheint es sinnvoll, eine Temperatur-Transformation vorzunehmen und nach den angegebenen Formeln zu rechnen. Die Ergebnisse müssen dann anschließend in °C rücktransformiert werden.

Handelt es sich um Ausgleichsvorgänge, bei denen sowohl Anfangs- als auch Endtemperatur von Null verschieden sind, so sollte zu Beginn der Auswertung mit Formel (2.3) und anschließend mit Formel (2.9) gerechnet werden. Eine Kombination beider Formeln kann die Genauigkeit noch weiter steigern.

3. Instationärer Temperaturverlauf in dreidimensionalen einschichtigen Bauteilen

In völliger Analogie zu Ziffer 2 läßt sich der Temperaturverlauf aus der Überlagerung der drei. (den Koordinatensystemen entsprechenden) eindimensionalen Temperaturen gemäß der Formel

$$T(x,y,z,t) = T(x,t) \cdot T(y,t) \cdot T(z,t) \cdot \frac{1}{T_B} \quad (3.1)$$

angeben. Die Bezugstemperatur T_B sollte, wie bereits in Ziffer 2 erwähnt, in Größe und Dimension der Anfangstemperatur entsprechen

$$T_B = T^0 = T(x,y,z,t=t_0) \quad (3.2)$$

Der Beweis von (3.1) als Lösung der dreidimensionalen Temperaturleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

ist überflüssig, da aus Ziffer 2 eindeutig eine Erweiterung auf die dritte Dimension deutlich wird.

Damit ist es nun möglich, die nichtstationäre Temperatur in einem Kubus mit beliebig veränderlichen Temperatur- bzw. Wärmestromrandbedingungen pro Seitenfläche mit den entsprechenden (sechs) Wärmeübergangskoeffizienten in einfacher Weise an jeder Stelle anzugeben.

4. Genauigkeitsbetrachtungen

4.1 Zum Vergleich herangezogene Lösungsverfahren zur Wärmeleitgleichung

4.1.1 Das Differenzenverfahren

Bis vor wenigen Jahren wurden instationäre Temperaturprobleme fast ausschließlich mit Verfahren der finiten Differenzen gelöst. Wegen seiner guten Stabilität hat sich hierbei besonders das Crank-Nicolson-Verfahren durchgesetzt, welches, im Gegensatz zu den andern Methoden, die Wärmestromdichte als arithmetischen Mittelwert der beiden Nachbarzeitpunkte wählt.

Allen Differenzenverfahren ist gemein, daß die partiellen Ableitungen durch endliche Differenzen ersetzt werden; aus Differentialquotienten werden also Differenzenquotienten. Je feiner die Unterteilung im Ort-Zeit-Raster gewählt wird, desto präziser ist das Ergebnis. Hierdurch erhöht sich jedoch auch die Rechenzeit erheblich, da in der Regel große Gleichungssysteme zu lösen sind. Dementsprechend ist der Einsatz einer leistungsfähigen Rechenanlage unumgänglich. In Abhängigkeit von Diskretisierung, Randbedingungen und Effektivität der Anlage sind jedoch unter Umständen größere Rechenzeiten zu erwarten.

Eine Abwandlung der soeben besprochenen numerischen Lösungsmöglichkeiten ist die Gears-Methode. Da eine entsprechende Software-Lösung im Rechenzentrum der Uni-GH-Wuppertal vorliegt, wurden die Vergleichsrechnungen mit diesem Bibliotheksprogramm durchgeführt.

Bei der Gears-Methode werden, wie vorher erwähnt, die partiellen Ortsableitungen durch endliche Differenzen ersetzt. Ausgehend von einem Anfangswert wird nun die Differentialgleichung vorwärts über die Zeit integriert.

Bei den durchgeführten Berechnungen hat sich eine Unterteilung in 11 Orts-Netzpunkte als hinreichend genau erwiesen. Eine weitere Steigerung der Genauigkeit war nicht mehr möglich.

Die numerische Stabilität bei der Zeitintegration wurde vom Computer selbst bestimmt.

Das hier beschriebene Verfahren unterliegt keinerlei Einschränkungen in den Randbedingungen. Auch mehrschichtige Temperaturprobleme lassen sich in gleicher Weise lösen, innere Wärmequellen und -senken sind möglich, können jedoch bei manchen Softwareversionen nicht berücksichtigt werden.

Problematisch kann die Aufbereitung der oft umfangreichen Daten werden. Für die Lösung wird ein Computer mit entsprechender Speicherkapazität benötigt, welcher, je nach Aufgabenstellung und Hardwarekonfiguration größere Rechenzeit beanspruchen kann. Zur Abschätzung der Konvergenz sind oft Vergleichsrechnungen nötig.

4.1.2 Die Finite-Element-Methode

Heute werden instationäre Temperaturprobleme größtenteils mit der Methode der finiten Elemente gelöst. Wegen der Vielzahl der dabei entwickelten Teillösungsmöglichkeiten sei hier auf die Literatur verwiesen [17],[18].

Des besseren Verständnisses willen wird eine zweidimensionale Lösungsmöglichkeit [17] grob skizziert.

Zunächst wird der betrachtete (zweidimensionale) Körper in eine größere Anzahl einfacher Elemente (z.B. Dreiecke oder Rechtecke) zerlegt, an deren Ecken (Knoten) die Temperaturen ermittelt werden sollen. Zur Beschreibung des in der Regel linear angenommenen Temperaturverlaufes innerhalb eines Elementes werden Formfunktionen aufgestellt, die sich vorteilhaft in Vektorschreibweise ausdrücken lassen.

Die Lösung spaltet sich in einen stationären und instationären Anteil auf.

Das Funktional der stationären Differentialgleichung wird mit Hilfe der Variationsrechnung gelöst, dabei können die entstehenden Integrale aufgrund der einfachen Formfunktionen sofort angegeben werden.

Da das Funktional nur für den zeitunabhängigen Fall existiert, wird das instationäre Verhalten durch Transformation in einen Wärmequellenterm berücksichtigt. Die dabei auftretenden Zeit-Formfunktionen werden nach der Methode der gewichteten Residuen mit einem Galerkin-Ansatz gelöst.

Ausgehend von einer bekannten Anfangstemperatur läßt sich für jeden Knoten eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Temperatur angeben. Das Zeitintervall Δt muß in Abhängigkeit von den Randbedingungen und der numerischen Stabilität hinreichend klein gewählt werden.

Da alle Elemente miteinander gekoppelt sind, entstehen mit zunehmender Anzahl der Knoten recht umfangreiche Gleichungssysteme.

Werden bei der Elementunterteilung und/oder Zeitdiskretisierung gewisse Regeln und Erfahrungen nicht beachtet, so führt dies häufig zu Konvergenzschwierigkeiten.

Mit Hilfe der Finite-Element-Methode lassen sich selbst komplizierte räumliche Strukturen gut erfassen. Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, daß jedes Element beliebige, auch temperaturabhängige Stoffwerte besitzen kann.

4.1.3 Das Matrizenverfahren von Heindl

In [7] und [19] wird eine Lösungsmöglichkeit der Wärmeleitgleichung für periodische Außentemperaturrandbedingungen vorgestellt. Ausgehend von zwei Grundfällen

a) nicht klimatisierter Raum: $\frac{\partial T(z=0, t)}{\partial z} = 0$
(Wärmestrom innen identisch Null)

b) klimatisierter Raum: $\theta_1 = \text{konstant}$

wird die transformierte Differentialgleichung mit einem Fourier-Reihenansatz gelöst, der in komplexer wie auch in reeler Form möglich ist.

Innenseite und Außenseite des Bauteils lassen sich mit Hilfe einer Wandmatrix verknüpfen; dadurch wird es möglich, auch mehrschichtige Wände durch einfache Multiplikation der einzelnen Schichtmatrizen zu berechnen.

Ein weiterer Vorteil besteht in der einfachen Bestimmung der instationären Kenngrößen wie Temperaturamplitudendämpfung und Phasenverschiebung.

Nachteilig beim Heindl-Verfahren sind die eingangs erwähnten einfachen Randbedingungen.

Aufheiz- und Abkühlungsvorgänge lassen sich damit nicht erfassen. Beliebig veränderliche Innentemperatur-Randbedingungen sind nicht möglich.

Anfangstemperaturen und thermische Einschwingvorgänge können ebenfalls nicht berücksichtigt werden, da das Verfahren wegen der Periodizität nur eingeschwungene Zustände betrachten kann. Innere Wärmequellen und Wärmesenken können nicht erfasst werden.

4.1.4 Das zeichnerische Verfahren von Schmidt

Wie bei dem bereits unter Ziffer 4.1.1 erläuterten Differenzenverfahren geht man bei der von Schmidt [1] entwickelten zeichnerischen Lösungsmöglichkeit von einer Differenzgleichung anstelle der Differentialgleichung aus. Die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Dadurch läßt sich bei vorgegebener Anfangstemperatur eine Rekursionsformel für die Temperatur nach Verstreichen des Zeitintervalls Δt angeben, wenn die Ortsableitungen durch genügend kleine Weg-Differenzen bestimmt sind.

Bei zweckmäßiger Wahl der Zeit- und Ort-Differenzen läßt sich in Kombination mit der Temperaturleitfähigkeit der Temperaturzuwachs an der betrachteten Stelle lediglich als Schnittpunkt mit der geradlinien Verbindung der beiden Ort-Nachbarpunkte angeben.

Dadurch kann man allein mit der Hilfe eines Lineals den instationären Temperaturverlauf abschätzen. Auch zeitlich veränderliche Wärmeübergangszahlen lassen sich auf diese Art berücksichtigen.

Die Genauigkeit steigt mit der Anzahl der gewählten Ort- und Zeit-Intervalle. Selbst bei äußerst feiner Differenzen-Unterteilung und präziser Zeichenarbeit kann dieses Verfahren nur eine Näherungslösung sein, da der tatsächliche Temperaturverlauf lediglich durch einen Polygonzug ersetzt und die zeitliche Auswertung durch den zu Beginn festgelegten Maßstab bestimmt wird. Da sich jeder Schritt aus dem Vorhergehenden ergibt, summieren sich die Abweichungen ständig auf, sodaß mit wachsender Zeit die ermittelten Werte immer ungenauer werden.

4.2 Vergleichsrechnungen

4.2.1 Numerische Betrachtungen

Die unter Ziffer 1 hergeleitete Lösung (1.93) ist als Reihenentwicklung angegeben. Es stellt sich somit die Frage, bei welcher Anzahl von Reihengliedern das tatsächliche Ergebnis erreicht ist. Vereinfacht läßt sich das k-te Reihenglied G_k darstellen als

$$G_k = Z_k \cdot e^{-\omega_k(t-t_0)} \tag{4.1}$$

Mit Z_k als Zahlenwert aus der k-ten Eigenfunktion. Unschwer ist zu erkennen, daß bei wachsender Zahlengröße des Exponenten der e-Funktion der Ausdruck G_k gegen Null strebt. Maßgebend für die Konvergenz ist also das Produkt aus dem k-ten Eigenwert ω_k mit der betrachteten Zeit (Differenz von aktueller Zeit zur Anfangszeit [h]). Daraus folgt:

- für kleine Zeiten werden viele Reihenglieder
- für große Zeiten werden sehr wenige Reihenglieder benötigt.

Da üblicherweise die Auswertung im Größenordnungsbereich von Stunden bzw. wenigen Tagen liegt, ist die numerische Größe der Eigenwerte ω_k von Bedeutung.

Bild 4 gibt eine Übersicht über den Verlauf des ersten Eigenwertes

$$\omega_1 = \kappa_1^2 \frac{\lambda}{\rho c}$$

in Abhängigkeit von Schichtdicke s und Wärmeleitfähigkeit λ an

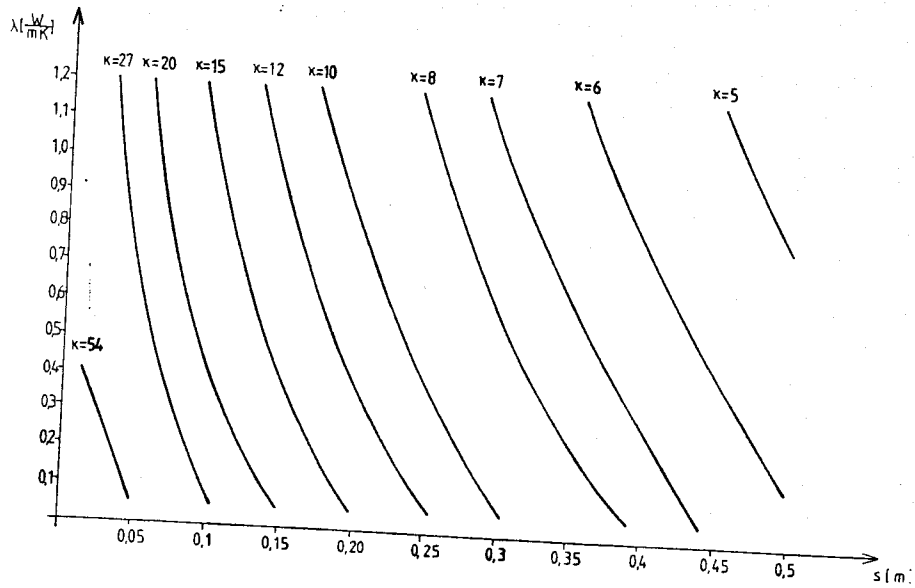


Bild 4: Diagramm der Eigenwerte für $\alpha_i = 7,7 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
 $\alpha_a = 25,0 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

Die Differenzen der Eigenwerte $\omega_{k+1} - \omega_k$ sind ebenfalls von Bedeutung.

Für einen typischen Fall (Beispiel aus 4.2.2) sind in Bild 5 die ersten Eigenwerte als Nullstellen der Determinante nach (1.4.1) angegeben

k	ω	κ
1	13115	11,502
2	53490	22,924
3	1,2321	34,641
4	2,2407	46,715
5	3,5723	58,984
6	5,2345	71,400
7	7,2324	83,927
8	9,5695	96,540
9	12,249	109,22
10	15,272	121,96
11	18,642	134,74
12	22,359	147,56
13	25,423	160,42
14	30,837	173,30
15	35,600	186,20
16	40,713	199,13
17	46,176	212,07
18	51,990	225,02
19	58,155	237,99
20	64,670	250,96
21	71,537	263,95
22	78,755	276,95
23	86,325	289,95
24	94,245	302,96
25	102,52	315,98
26	111,14	329,00
27	120,12	342,03
28	129,44	355,06
29	139,12	368,09
30	149,15	381,13

Bild 5: Typischer Verlauf der ersten 30 Eigenwerte

Aus Bild 5 ist leicht erkennbar, daß der zweite Eigenwert ein Vielfaches (hier etwa vierfach) vom Ersten ist. Durch den bedeutenden Einfluß des ersten Gliedes läßt sich das gute Konvergenzverhalten erklären, da die nächsten Glieder (als entsprechend Vielfaches in der e-Funktion) hierdurch einen erheblich geringeren Einfluß haben. Die Differenzen der Eigenwerte streben mit wachsendem k einem Grenzwert entgegen.

Der Funktionsverlauf $D_N(\omega)$ ist aus Bild 6 zu entnehmen.

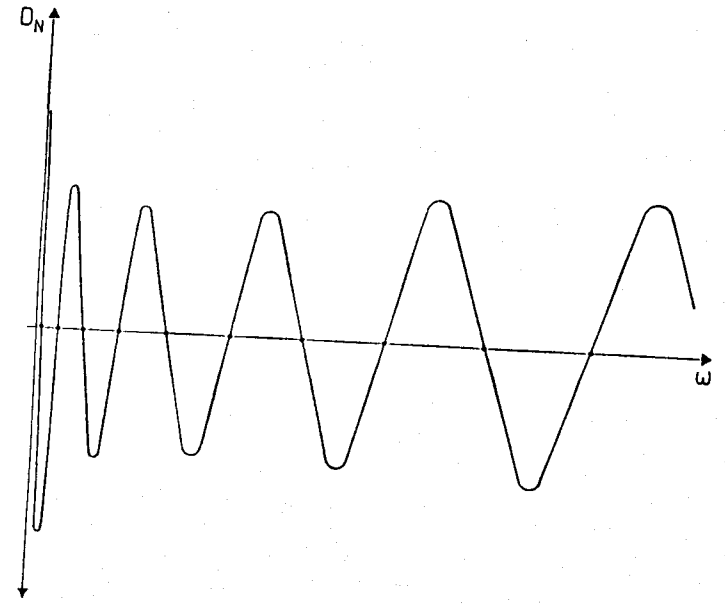


Bild 6: qualitativer Funktionsverlauf der Determinante als Funktion des Eigenwertes

Da eine lückenlose Bestimmung der Eigenwerte ω_k von fundamentaler Bedeutung ist, soll nachfolgend ein kurzer Überblick über die praktizierte Vorgehensweise gegeben werden.

Beginnend mit einem Wert für ω der nahe an Null liegt, wird der Wert der Determinante in kurz aufeinanderfolgenden Abschnitten $\Delta\omega \approx 0,01 \dots 0,1$ solange bestimmt, bis ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Nun setzt eine Newton-Iteration ein, wobei die Ableitungen numerisch gemäß Bild 7 bestimmt werden.

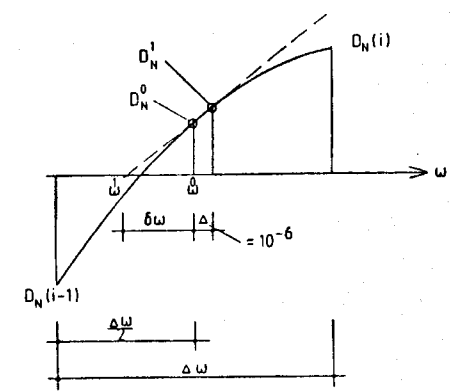


Bild 7: Vorgehensweise der numerischen Newton-Iteration

$$D'_N = \frac{dD_N}{d\omega} \approx \frac{D_N^1 - D_N^0}{\Delta} = \frac{D_N^0}{\delta\omega} \tag{4.2}$$

Eine erste Näherung für die Nullstelle wird dann

$$\hat{\omega} = \hat{\omega} - \delta\omega = \hat{\omega} - \frac{D_N^0 \cdot \Delta}{D_N^1 - D_N^0} \tag{4.3}$$

Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Um die nächste Nullstelle zu finden, wird die Suche nach einem Vorzeichenwechsel, jetzt beginnend mit $D_N(i)$, wieder aufgenommen. Sobald dann der Nulldurchgang stattfindet, setzt die eben beschriebene Newton-Iteration wieder ein. Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden, so daß die gewünschte Anzahl der Eigenwerte lückenlos zu Stande kommt. Ein Rechentest mit der Suche nach den ersten 500 Eigenwerten zeigte, daß das beschriebene Verfahren auch im Bereich großer Zahlen noch stabil bleibt.

Betrachtet man die Lösung (1.93), so stellt sich die Frage nach der Auswertung der dort angegebenen Integrale. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll nicht der Versuch unternommen werden, diese Integrale unter Vorgabe irgendwelcher Randbedingungen zu vereinfachen, obwohl es beispielsweise bei einer Entwicklung der Randtemperaturen in Fourier-Reihen eine Leichtigkeit wäre - damit würde ein ganz wesentlicher Aspekt, nämlich beliebig instationäre, nicht periodische Randbedingungen der Bequemlichkeit geopfert.

Diese Forderung der Allgemeinheit der Lösung macht deutlich, daß es für die Bestimmung der Integrale keine pauschale Lösungsmöglichkeit gibt; es wird jedoch eine Auswertung mittels numerischer Integration, beispielsweise nach dem Simpson-Verfahren vorgeschlagen.

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß bei sinusförmiger Randtemperatur eine Steigerung der Anzahl der Integrationsintervalle beim Simpson-Verfahren nur zu einer ganz unwesentlichen Verbesserung der Ergebnisse führte.

Eine Gegenüberstellung in einem Auswertezeitraum von 24 Stunden für 3 unterschiedliche Varianten der Integrationsintervalle n:

- Fall 1: $n = t + 24$
- Fall 2: $n = t + 100$
- Fall 3: $n = t + 1000$ (t = Zeit in [h])

brachte bei Berücksichtigung von 3 Reihengliedern folgendes Ergebnis:

Prozentuale Abweichung von der tatsächlichen Lösung

Fall	max. Abweichung [%]	durchschn. Abweichung [%]
1	0,70	0,25
2	0,65	0,20
3	0,65	0,20

Damit hat sich gezeigt, daß selbst im Fall 1 sehr gute Ergebnisse erreicht wurden, während der Fall 3, trotz der Rechenintensität, keine Genauigkeitssteigerung brachte.

Eine weitere Analyse (vgl. hierzu Bild 8) führte zu dem Ergebnis, daß die Abweichungen über die Zeit aufgetragen in einer Sinusform um den tatsächlichen Wert schwingen. Ein systematischer Verlauf in z-Richtung war dabei nicht erkennbar.

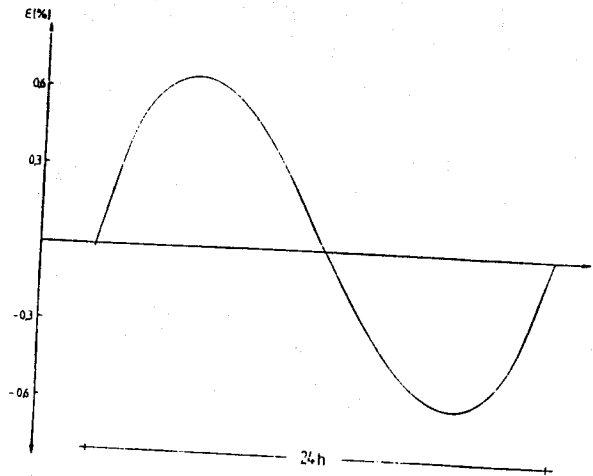


Bild 8: Zeitlicher Verlauf der prozentualen Abweichungen

4.2.2 Eingeschwungener Temperaturzustand

Anhand der nachfolgend gezeigten Plotts der Temperaturverläufe lassen sich wichtige Aussagen für den eingeschwungenen Temperaturzustand treffen:

- die Berücksichtigung von drei Reihengliedern führt bereits zu beachtlicher Genauigkeit. Bei der zeichnerischen Darstellung ist eine Abweichung vom tatsächlichen Temperaturverlauf kaum erkennbar. Maximale Differenz: $\approx 0,7 \%$.
- die Berücksichtigung von nur einem Reihenglied stellt den Temperaturverlauf bereits im wesentlichen richtig dar. Für Abschätzungen ist er somit genügend genau. Maximale Abweichung: $\approx 4,8 \%$.

Der Vergleichsrechnung wurde eine einschichtige Gasbetonwand mit folgenden Daten zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,23 \text{ W/(mK)} \\ \rho &= 800 \text{ kg/m}^3 \\ c &= 0,28 \text{ Wh/(kgK)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= 0,24 \text{ m} \\ \alpha_i &= 7,7 \text{ W/(m}^2\text{K)} \\ \alpha_a &= 25 \text{ W/(m}^2\text{K)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= 20^\circ\text{C} \\ \vartheta_a &= 28-8 \sin(\pi t/12) \text{ [}^\circ\text{C]} \end{aligned}$$

Die Anfangstemperatur zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wurde mit $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$ über die gesamt Wand als konstant angenommen. Da die Außentemperatur zu diesem Zeitpunkt bei 28°C lag, konnte das Einschwingen sehr gut beobachtet werden.

Die Auswertung wurde im Abstand von jeweils 3 Stunden, beginnend mit $t = 15 \text{ h}$ (etwa von diesem Zeitpunkt an war die Temperatur eingeschwungen) vorgenommen.

Zum Vergleich wurde die unter Ziffer 4.1.1 beschriebene Gears-Methode herangezogen. Schon bei fünf Reihengliedern lagen die rechnerischen Ungenauigkeiten nur noch bei etwa 0,1 %. Abweichungen zu der in gleicher Weise gerechneten Finite-Element-Methode waren lediglich in der zweiten Nachkommastelle zu finden (Größenordnung: 0,05 %). Ein Vergleich mit dem eingeschwungenen Zustand nach dem Verfahren von Heindl zeigte etwa gleich große Abweichungen. Damit kann festgestellt werden, daß die zum Test herangezogenen Berechnungsverfahren

- Differenzenverfahren nach der Gears-Methode
 - Finite-Element-Methode
 - Matrizenverfahren von Heindl
- im Rahmen der Rechengenauigkeit völlig miteinander übereinstimmen.

Zur besseren Übersicht sind 4 Anordnungen gewählt worden:

- der tatsächliche Temperaturverlauf für $t = 15, 18, \dots, 36$ h
- Vergleich der Temperatur aus der Berücksichtigung von $k_e = 1, 2, 3$ mit der tatsächlichen Lösung für $t = 15, 21, \dots, 33$ h
- Vergleich der Temperatur aus der Berücksichtigung von $k_e = 1, 2, 3$ mit der tatsächlichen Lösung für $t = 18, 24, \dots, 36$ h
- Für alle betrachteten Zeitpunkte eine gesonderte Auswertung mit dem jeweils optimalen Maßstab zur Darstellung der Abweichungen vom Gears-Verlauf für $k_e = 1$ und $k_e = 3$

Temperaturverlauf (°C)

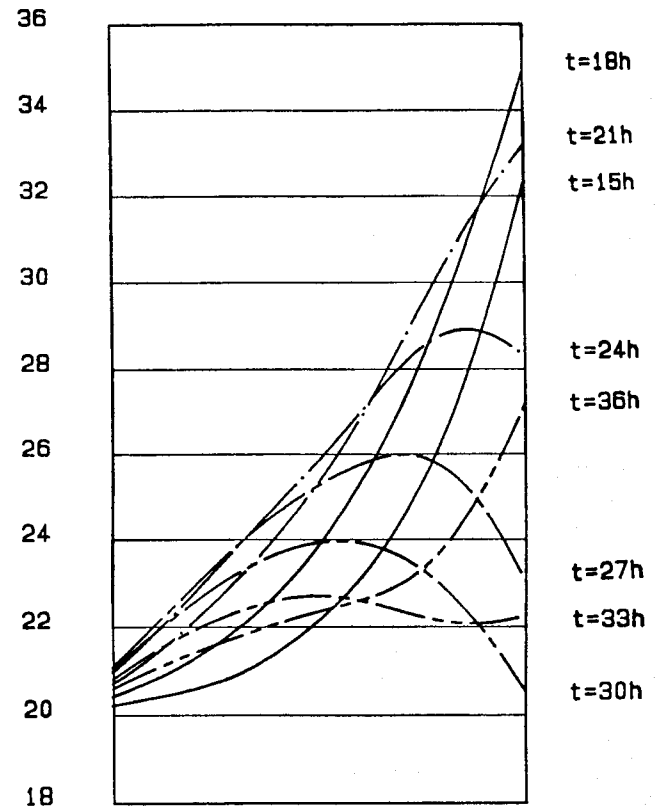


Bild 9: Tatsächlicher Temperaturverlauf aufgezeichnet über 24 h mit $\Delta t = 3$ h

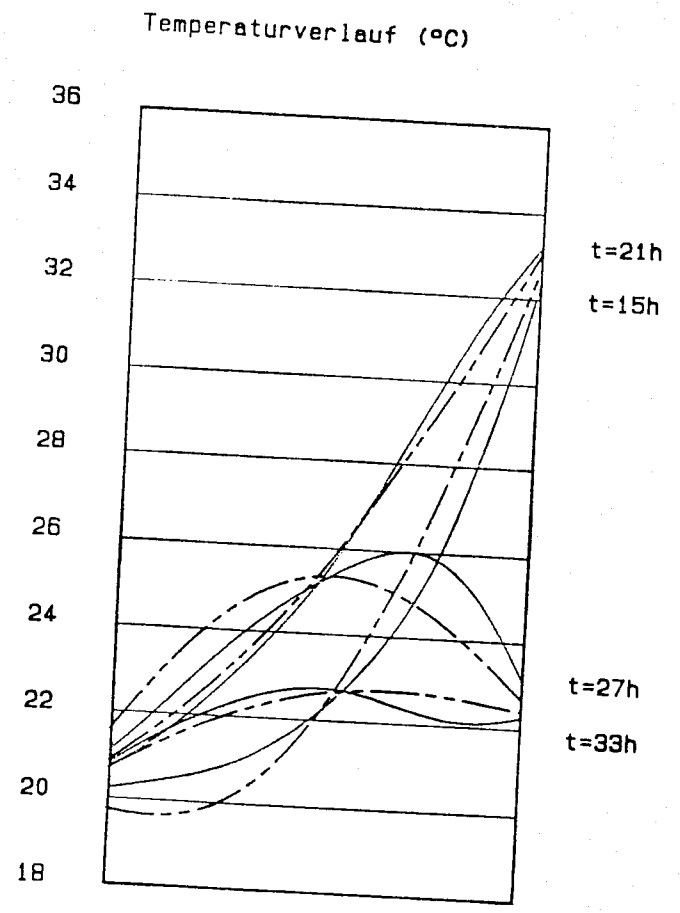


Bild 10: Vergleich eines eingliedigen Ansatzes
 mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf
 für t = 15 h, 21 h, 27 h, 33 h

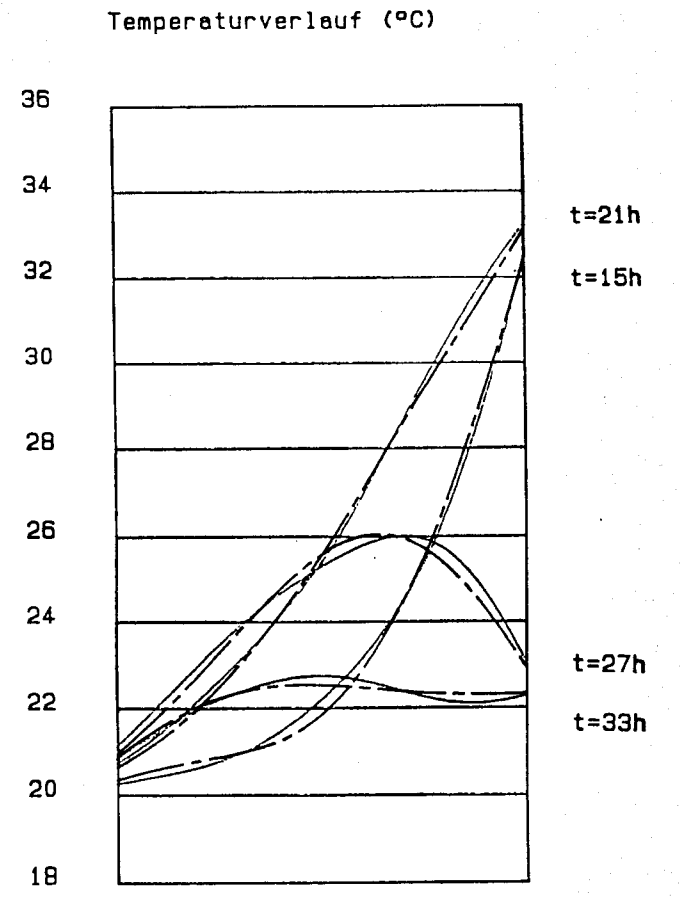


Bild 11: Vergleich eines zweigliedigen Ansatzes
 mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf
 für t = 15 h, 21 h, 27 h, 33 h

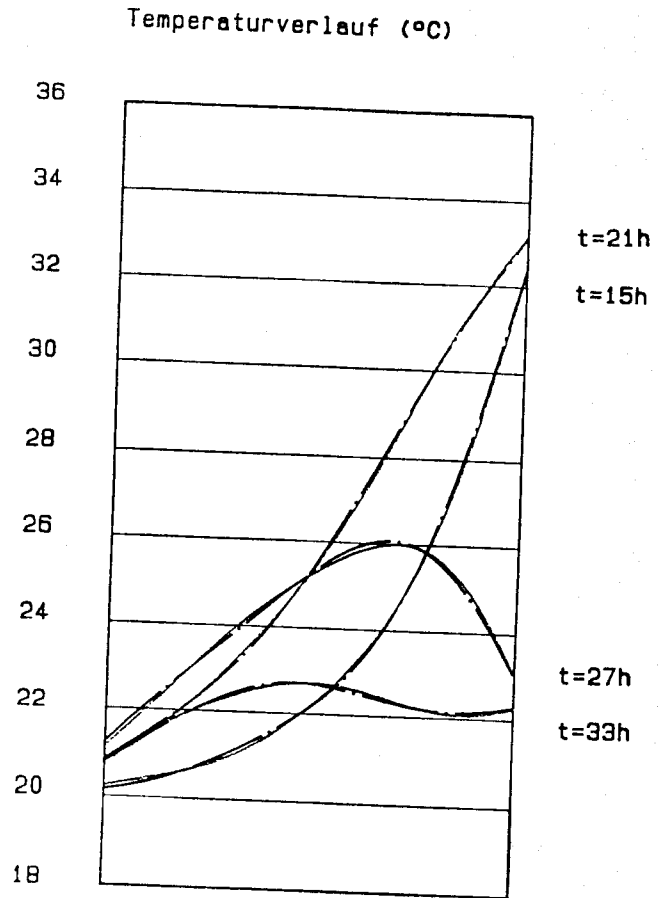


Bild 12: Vergleich eines dreigliedrigen Ansatzes
mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf
für t = 15 h, 21 h, 27 h, 33 h

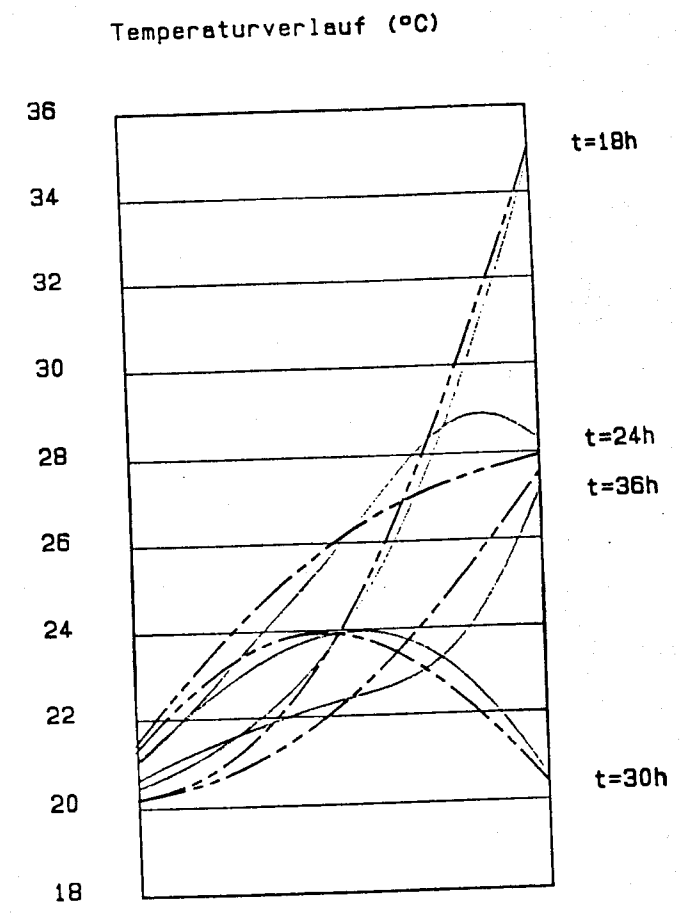


Bild 13: Vergleich eines eingliedrigen Ansatzes
mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf
für t = 18 h, 24 h, 30 h, 36 h

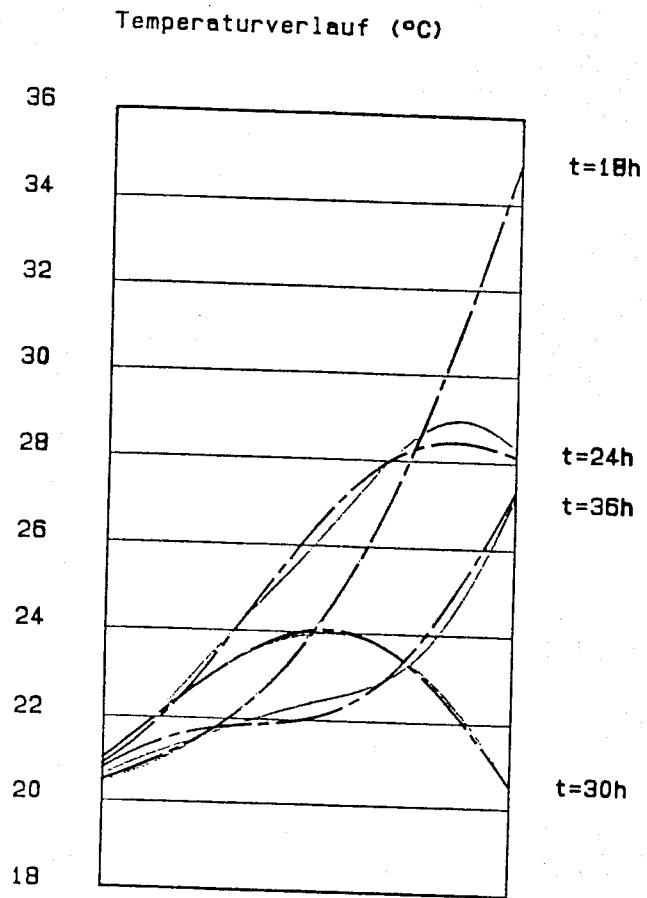


Bild 14: Vergleich eines zweigliedrigen Ansatzes --- mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf — für $t = 18 \text{ h}, 24 \text{ h}, 30 \text{ h}, 36 \text{ h}$

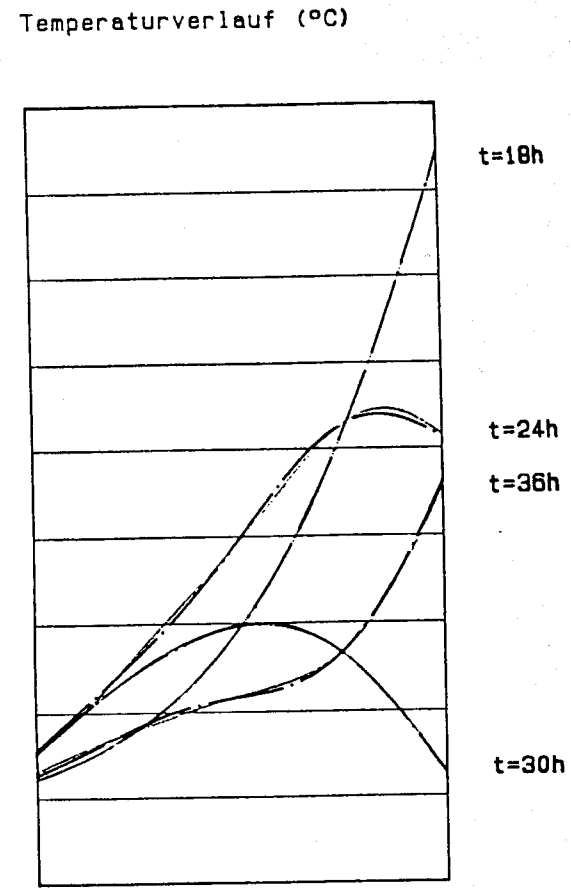


Bild 15: Vergleich eines dreigliedrigen Ansatzes --- mit dem tatsächlichen Temperaturverlauf — für $t = 18 \text{ h}, 24 \text{ h}, 30 \text{ h}, 36 \text{ h}$

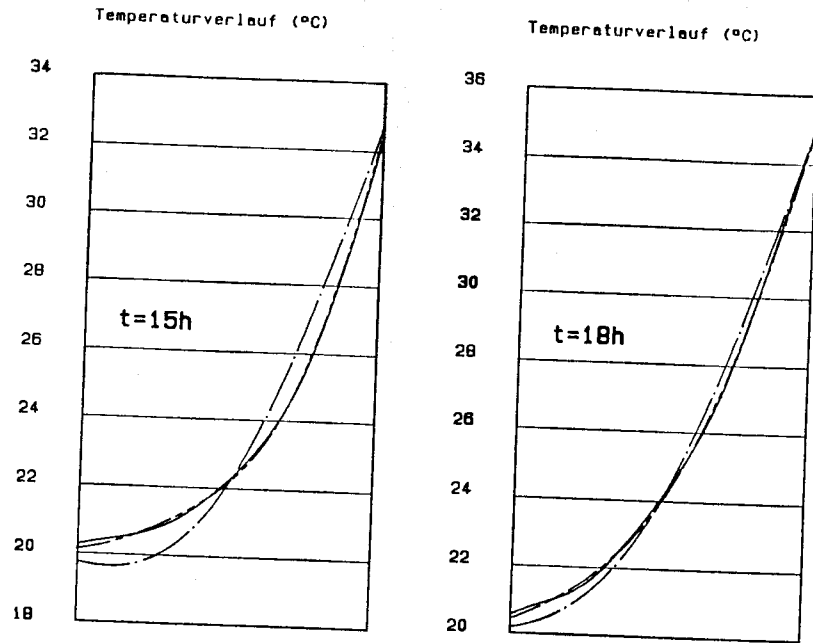


Bild 16: Vergleich:
 eingliedriger Ansatz
 dreigliedriger Ansatz - - - - -
 tatsächliche Temperatur ———
 für t = 15 h, 18 h

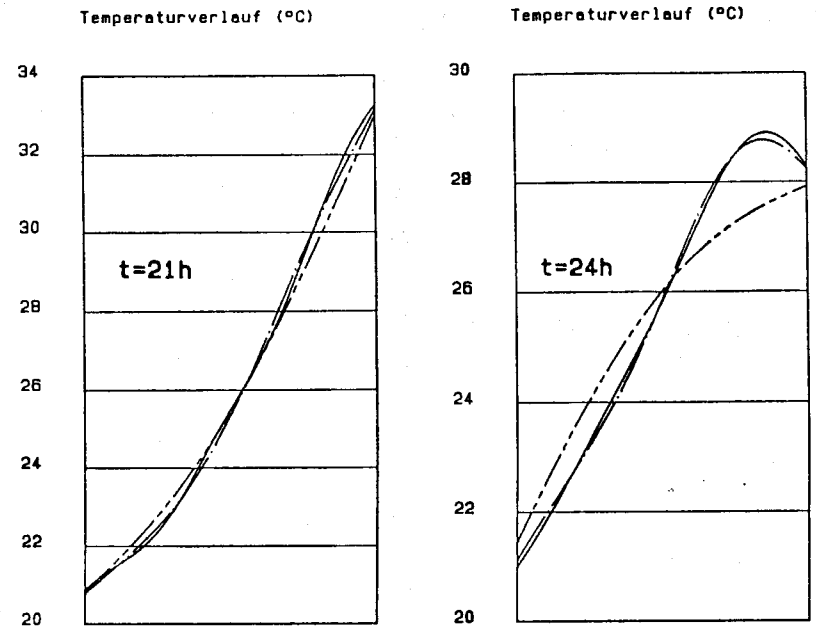


Bild 17: Vergleich:
 eingliedriger Ansatz
 dreigliedriger Ansatz - - - - -
 tatsächliche Temperatur ———
 für t = 21 h, 24 h

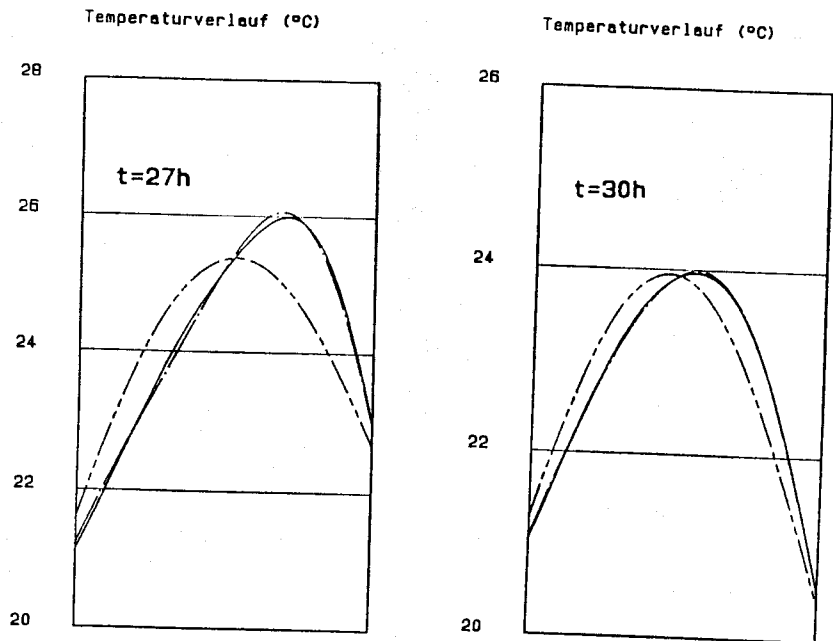


Bild 18 : Vergleich:
 eingliedriger Ansatz -----
 dreigliedriger Ansatz -.-.-.-
 tatsächliche Temperatur _____
 für t = 27 h, 30 h

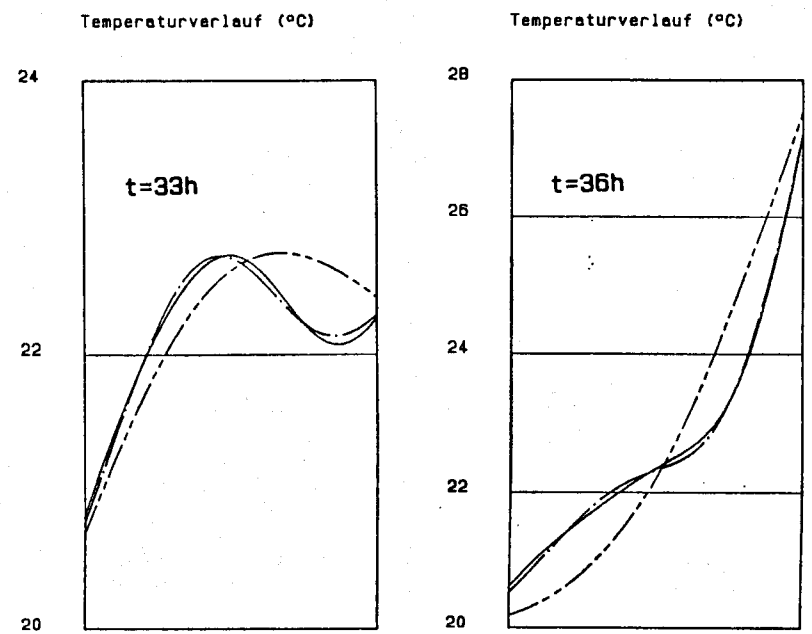


Bild 19 : Vergleich:
 eingliedriger Ansatz -----
 dreigliedriger Ansatz -.-.-.-
 tatsächliche Temperatur _____
 für t = 33 h, 36 h

4.2.3 Approximation der Anfangsbedingung

Eine Beschreibung der Anfangsbedingung ist nur dann nötig, wenn Innen- und/oder Außentemperatur von dieser Anfangstemperatur verschieden ist.

Bei einem vorgegebenen linearen Verlauf der Anfangstemperatur kann sofort gesagt werden, daß eine große Anzahl von Reihengliedern zur Approximation in sin- und cos-Termen nötig sein wird.

Die parabolische Temperaturverteilung infolge einer Wärmequellen-Anfangsbedingung läßt die Näherungslösung günstiger erscheinen, so daß nur sehr wenige Reihenglieder gebraucht werden.

4.2.3.1 Lineare Anfangsbedingung

In der betrachteten Gegenüberstellung wird die bereits unter Ziffer 4.1.2 näher beschriebene Gasbetonwand zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ betrachtet. Zu dieser Zeit herrscht gemäß den Randbedingungen außen eine Temperatur von 28°C , während die Innentemperatur ebenso wie die vorgegebene konstante Wandtemperatur auf 20°C fixiert ist.

Wie bereits erwähnt, eignen sich die Eigenfunktionen schlecht zur Beschreibung einer Konstanten. Aus dem Grunde sind relativ viele Reihenglieder zur genauen Annäherung notwendig. Die exakte Anzahl wird von der entsprechenden Problemstellung abhängig sein, da ja in der Regel nicht der Zeitpunkt $t = t_0$, sondern Zeiträume für $t > t_0$ relevant sind. (Diese Problematik wird unter Ziffer 4.2.4 noch weiter besprochen) Die größten Unstimmigkeiten treten in der Beispielrechnung naturgemäß an der Außenoberfläche auf.

Die prozentualen Abweichungen an dieser Stelle sind in den betreffenden Untersuchungen angegeben. Eine Verdoppelung der Reihenglieder bringt etwa eine Halbierung des Fehlers. So wurde bei $k_e = 50$ noch eine Abweichung von 4,2 %, bei $k_e = 100$ noch eine Abweichung von 2,1 % festgestellt.

Temperaturverlauf (°C)

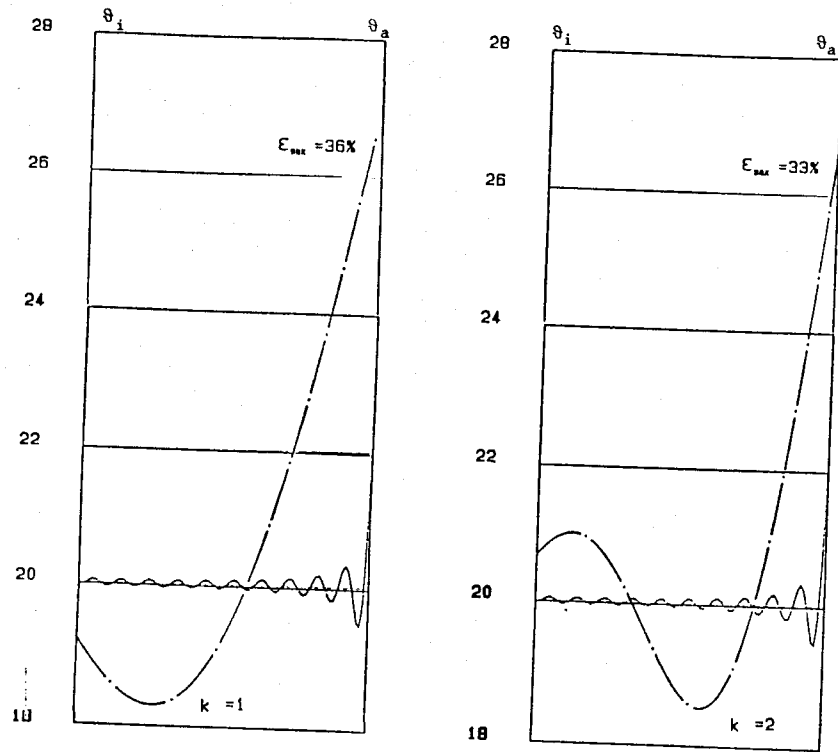


Bild 20: Vergleich eines 1-gliedrigen und 2-gliedrigen Naherungsansatzes mit dem 21-gliedrigen Ansatz und Angabe der jeweiligen max. Abweichung zur Anfangstemperatur von 20°C

$\vartheta_i = 20^\circ\text{C}$
 $\vartheta_a = 28^\circ\text{C}$

Temperaturverlauf (°C)

Temperaturverlauf (°C)

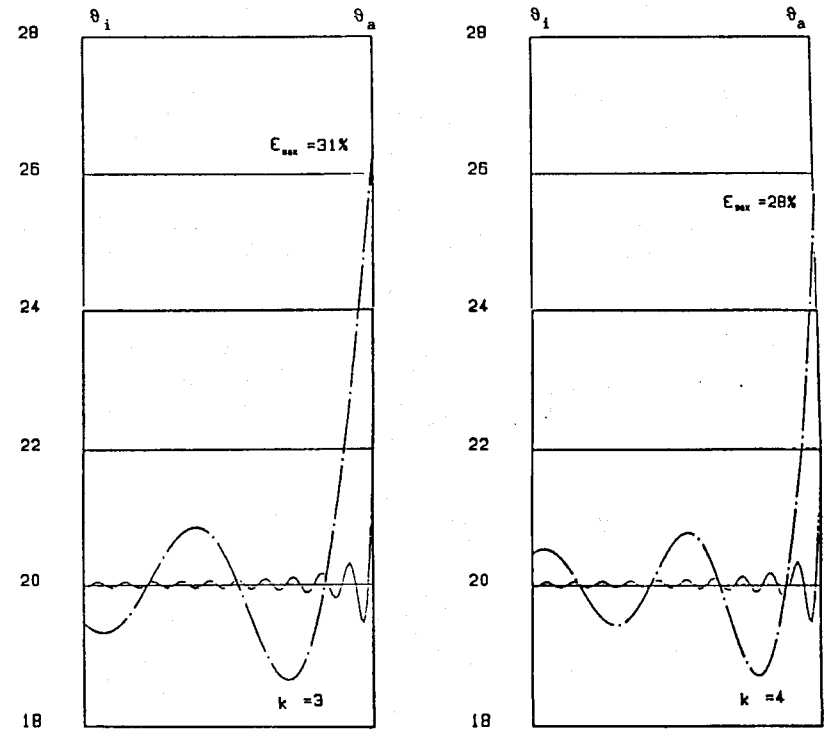


Bild 21: Vergleich eines 3-gliedrigen und 4-gliedrigen Naherungsansatzes mit dem 21-gliedrigen Ansatz und Angabe der jeweiligen max. Abweichung zur Anfangstemperatur von 20°C

$\vartheta_i = 20^\circ\text{C}$
 $\vartheta_a = 28^\circ\text{C}$

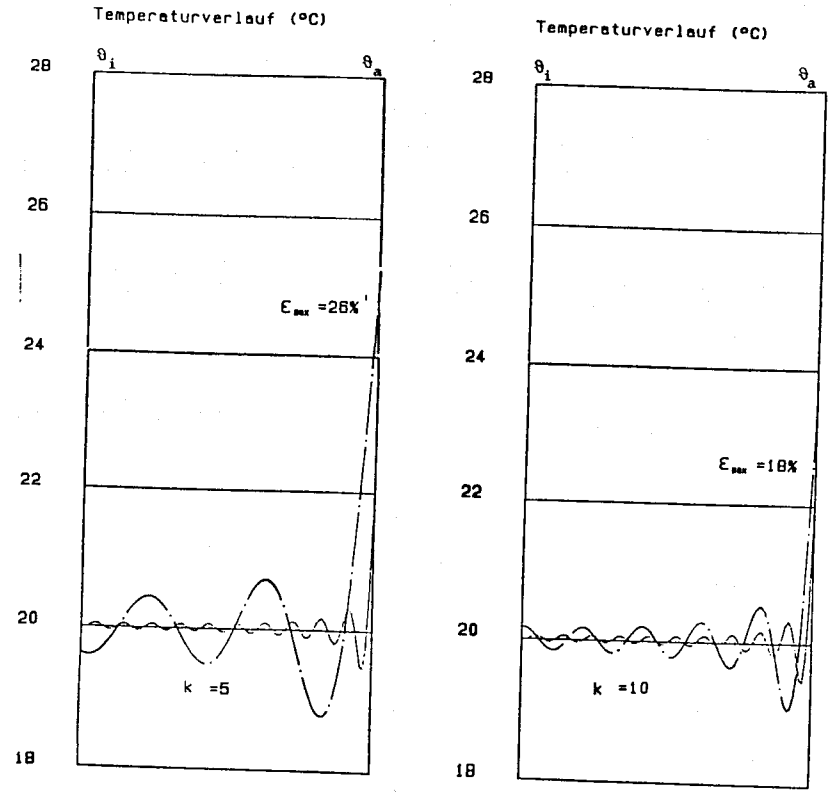


Bild 22: Vergleich eines 5-gliedrigen und 10-gliedrigen Naherungsansatzes mit dem 21-gliedrigen Ansatz und Angabe der jeweiligen max. Abweichung zur Anfangstemperatur von 20°C

$\theta_i = 20^\circ\text{C}$
 $\theta_a = 28^\circ\text{C}$

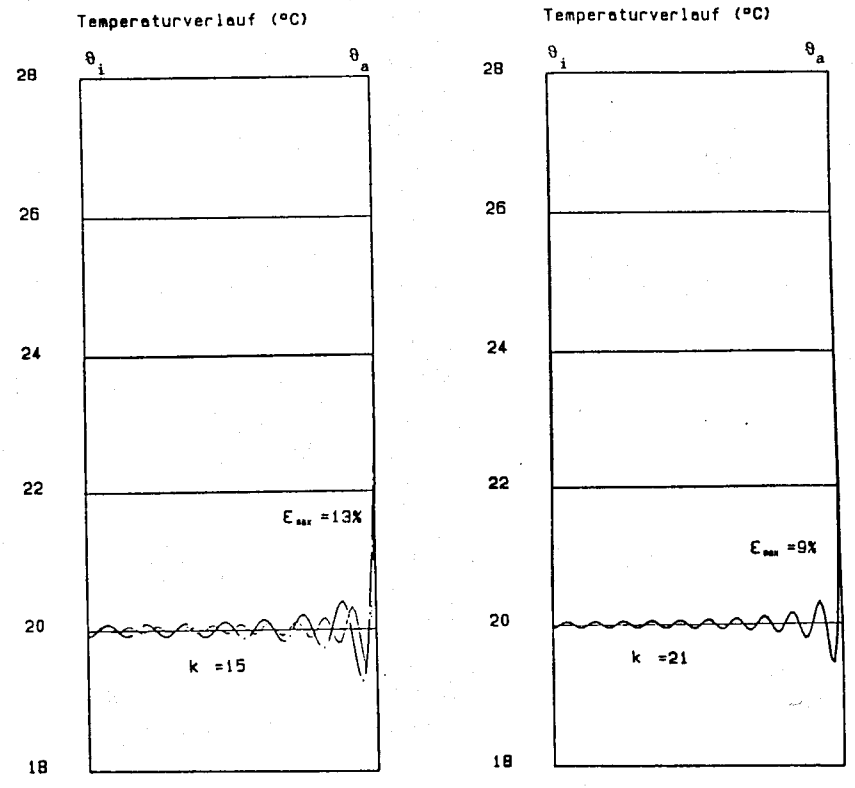
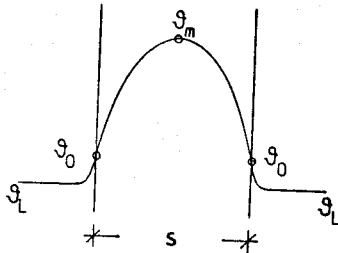


Bild 23: Vergleich eines 15-gliedrigen Naherungsansatzes mit dem 21-gliedrigen Ansatz und Angabe der jeweiligen max. Abweichung zur Anfangstemperatur von 20°C

$\theta_i = 20^\circ\text{C}$
 $\theta_a = 28^\circ\text{C}$

4.2.3.2 Parabolischer Verlauf aus innerer Wärmequelle

Nach [4] ist es möglich, die Temperaturverteilung in einem Bauteil bei Wirksamkeit einer stationären inneren Wärmequelle zu bestimmen.



$$q = \alpha \cdot \Delta \vartheta = \alpha \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_L)$$

$$\dot{Q} \cdot V = q \cdot A(\text{gesamt}) \quad \frac{\dot{Q} \cdot V}{2} = q \cdot A \quad (\text{pro Wandfläche})$$

$$q = \frac{\dot{Q} \cdot V}{2 \cdot A} \quad \text{mit } s = \frac{V}{A}$$

$$q = \frac{s}{2} \cdot \dot{Q}$$

Damit

$$\dot{Q} \cdot \frac{s}{2} = \alpha \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_L)$$

$$\vartheta_0 = \vartheta_L + \frac{\dot{Q} \cdot s}{2 \cdot \alpha} \quad (\text{Oberflächentemperatur}) \quad (4.4)$$

$$\vartheta_m - \vartheta_0 = \frac{q \cdot s}{4 \cdot \lambda} = \frac{\dot{Q} \cdot s^2}{8 \cdot \lambda}$$

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + \frac{\dot{Q} \cdot s^2}{8 \cdot \lambda} \quad (\text{Mittentemperatur}) \quad (4.5)$$

In der vorliegenden Untersuchung sollte dieser Temperaturverlauf als Anfangsbedingung gemäß (1.6)

$$T^m(z, t_0) = \vartheta_0 + \frac{\vartheta_1}{z} - \frac{\dot{Q}_0}{2} \left(z - \frac{s}{2}\right)^2$$

approximiert werden.

Als Berechnungsbeispiel wurde eine einschichtige Gasbetonwand gewählt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,3 \text{ W/(mK)} \\ \rho &= 800 \text{ kg/m}^3 \\ c &= 0,28 \text{ Wh/(kgK)} \\ s &= 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \alpha_a = 8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

$$\vartheta_i = \vartheta_a = 20^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q} = 300 \text{ W/m}^3$$

damit

$$\vartheta_0 = 20 + 300 \cdot 0,3 / (2 \cdot 8) = 25,625^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_m = 25,625 + 300 \cdot 0,3^2 / (8 \cdot 0,3) = 36,875^\circ\text{C}$$

und

$$\begin{aligned} T &= 36,875 - \frac{\dot{Q}}{(2\lambda)} \cdot (z - 0,15)^2 \\ &= 36,875 - 300 / (2 \cdot 0,3) \cdot (z - 0,15)^2 \quad (0 \leq z \leq 0,3) \end{aligned}$$

Die Ergebnisse wurden mit einer Finite-Element-Berechnung zusätzlich überprüft. Abweichungen waren schon bei einer Berücksichtigung von 5 Reihengliedern nicht mehr erkennbar.

Damit kann festgestellt werden, daß parabolische Temperaturverläufe mit dem gewählten Näherungsansatz gut beschrieben werden können; mit einem $k_e = 3$ erreicht man schon sehr gute Übereinstimmung.

Temperaturverlauf (°C)

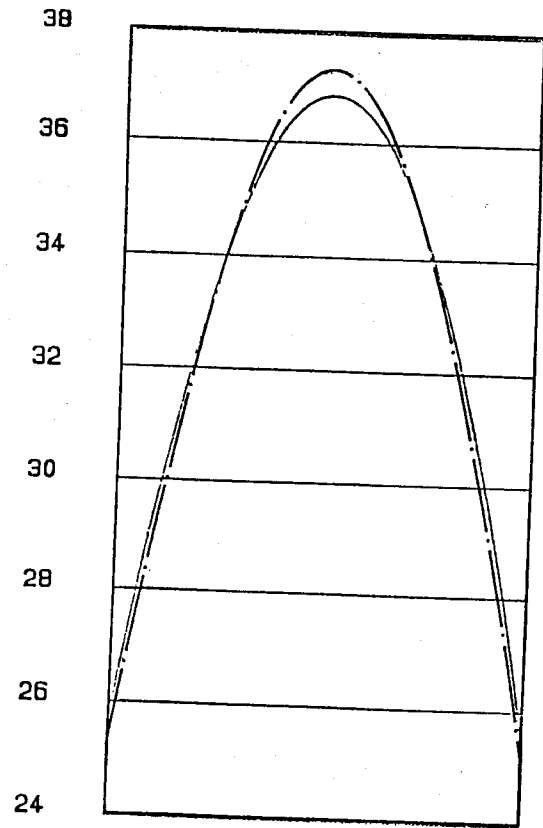


Bild 24: Vergleich eines eingliedrigen Ansatzes
 mit der funktional vorgegebenen
 Anfangstemperatur
 aus innerer Wärmequelle

Temperaturverlauf (°C)

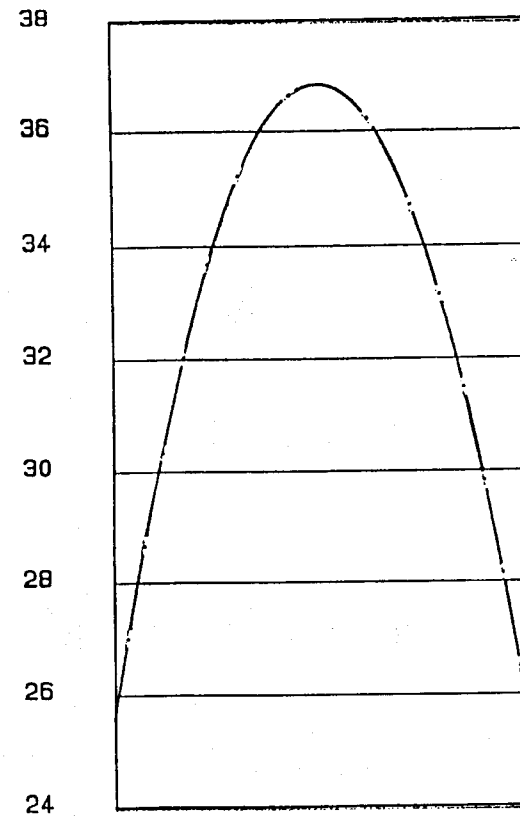


Bild 25: Vergleich eines dreigliedrigen Ansatzes
 mit der funktional vorgegebenen
 Anfangstemperatur
 aus innerer Wärmequelle

4.2.4 Eindimensionaler Temperaturverlauf in mehrschichtigen Bauteilen

Grundsätzlich lassen sich die in den vorherigen Kapiteln (Ziffer 4.2.1 bis 4.2.3) gewonnenen Erkenntnisse auch auf mehrschichtige Wände bzw. Decken übertragen. Die numerische Stabilität kann hier jedoch unter Umständen durch die Kombination sehr unterschiedlicher Stoffwerte beeinträchtigt werden; dies läßt sich durch eine größere Anzahl von Reihengliedern kompensieren.

Für die Beispielrechnung wurde eine 24 cm starke Wand aus Kalksandstein mit 6 cm Außendämmung herangezogen. Folgende Daten lagen der Berechnung zugrunde:

	Schicht 1 (innen)	Schicht 2 (außen)
λ [W/(mK)]	0,79	0,035
ρ [kg/m ³]	1600,00	30,00
c [Wh/(kgK)]	0,26	0,41
s [m]	0,24	0,06

$$\alpha_i = 7,7 \text{ W/(m}^2\text{K)} \quad \alpha_a = 25,0 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

$$\vartheta_i = 20,0 \text{ }^\circ\text{C} \quad \vartheta_a = 28,0 - 8 \sin(\pi t/12) \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Der nachstehend gezeigte Plott wurde mit einem dreigliedrigen Summenansatz für den eingeschwungenen Temperaturzustand erstellt. Dabei lagen die maximalen Abweichungen gegenüber dem Heindl-Verfahren bei etwa 1,9%.

Aus dem Plott läßt sich unschwer der quasi-lineare Temperaturverlauf in der Wärmedämmung erkennen, es wird jedoch auch deutlich, daß sich diese Geraden aufgrund der Kopplung mit der thermisch trägeren Kalksandsteinwand überschneiden. Eine instationäre Betrachtungsweise erscheint deshalb, nicht zuletzt aufgrund des - wenngleich stark gedämpften - Verlaufs in der Kalksandstein-Wand angebracht.

Temperaturverlauf (°C)

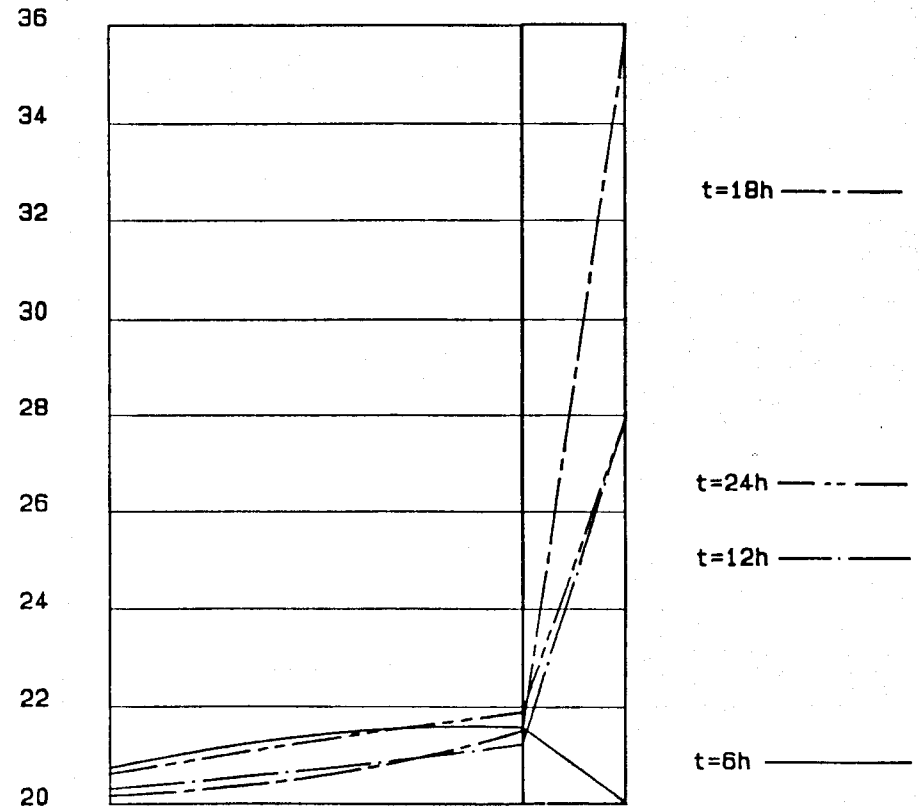


Bild 26: Temperaturverlauf in einer zweischichtigen Wand für $t = 6 \text{ h, } 12 \text{ h, } 18 \text{ h, } 24 \text{ h}$, gerechnet mit einem dreigliedrigen Ansatz

4.2.5 Berücksichtigung einer inneren Wärmequelle

Aus den nachfolgend gezeigten Plotts läßt sich das Einschwingverhalten der Temperatur infolge einer inneren Wärmequelle leicht ersehen. Wie bereits unter Ziffer 4.2.3.2 angesprochen, sind die Ergebnisse auch bei Berücksichtigung von wenigen Reihengliedern sehr genau. Schon bei drei Gliedern waren gegenüber einer vergleichsweise durchgeführten Finite-Element-Berechnung keine Abweichungen erkennbar, selbst bei der Bestimmung mit nur einem Reihenglied konnte für $t \geq 3$ Stunden keine Differenz festgestellt werden.

Eine zusätzliche Kontrolle der Richtigkeit des hier ermittelten Ergebnisses sind die nach Ziffer 4.2.3.2 berechnbaren Oberflächen- und Mitten-Temperaturen; das hier deutlich gezeigte langsame Einschwingen (erst nach 36 Stunden ist der stationäre Zustand erreicht) läßt sich aus den Formeln von Grigull selbstverständlich nicht nachvollziehen.

Die Vergleichsrechnung wurde mit folgenden Daten durchgeführt:

- $\lambda = 0,3 \text{ W/(mK)}$
- $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$
- $c = 0,28 \text{ Wh/(kgK)}$
- $s = 0,3 \text{ m}$
- $\vartheta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- $\vartheta_i = \vartheta_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- $\alpha_i = \alpha_a = 8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die innere Wärmequelle mit der Wärmequellenenergieigigkeit

$$\dot{Q} = 500 \text{ W/m}^3$$

eingeschaltet.

Nach den unter Ziffer 4.2.3.2 angegebenen Formeln folgt für den eingeschwungenen Temperaturzustand:

$$\vartheta_o = 20 + 500 \cdot 0,3 / (2 \cdot 8) = 29,375 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_m = 29,375 + 500 \cdot 0,3^2 / (8 \cdot 0,3) = 48,125 \text{ }^\circ\text{C}$$

Temperaturverlauf ($^\circ\text{C}$)

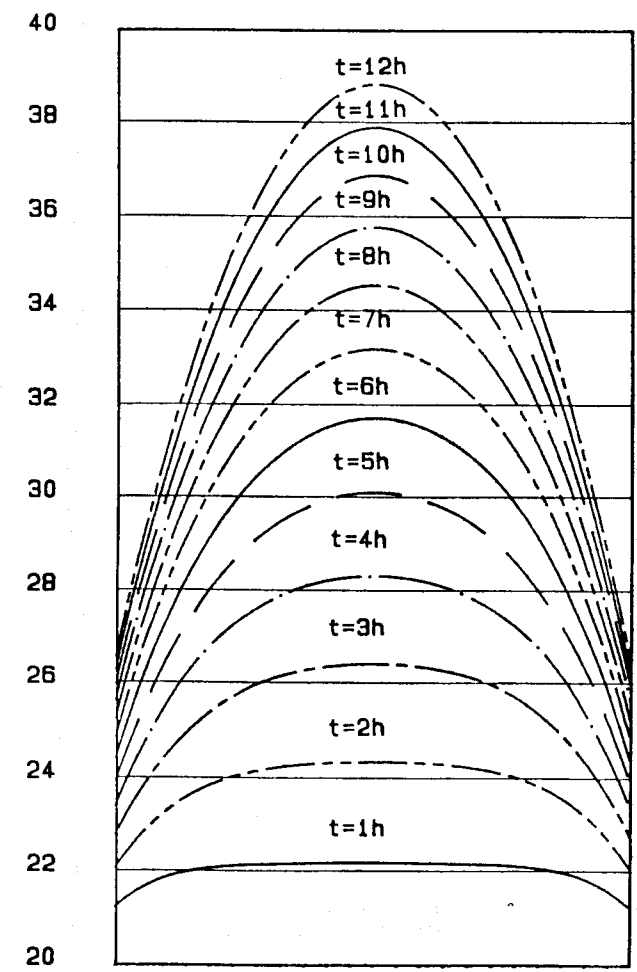


Bild 27: Einschwingen der Temperatur infolge innerer Wärmequellen für die ersten 12 Stunden, gerechnet mit einem dreigliedrigen Reihenansatz

Temperaturverlauf (°C)

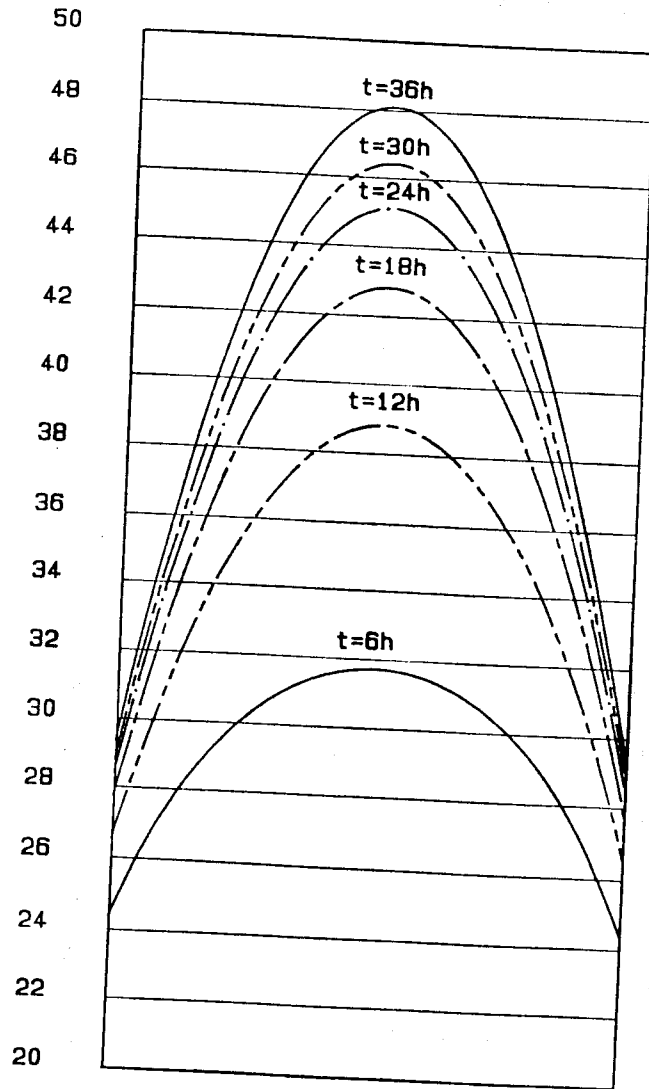


Bild 28: Einschwingen der Temperatur infolge innerer Wärmequelle bis zum Endzustand

Temperaturverlauf (°C)

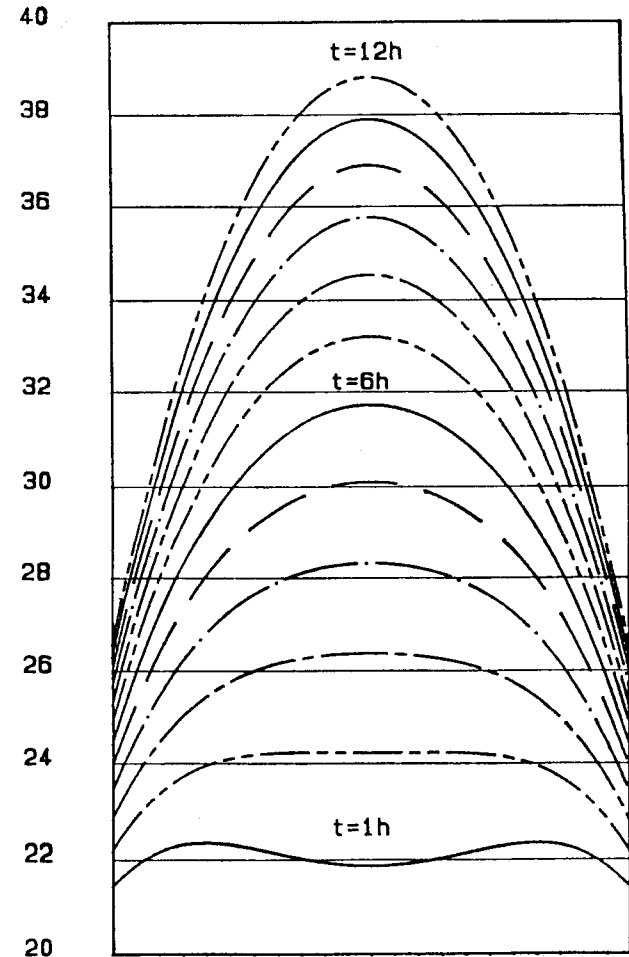


Bild 29: Einschwingen der Temperatur infolge innerer Wärmequelle für die ersten 12 Stunden für einen eingliedigen Reihenansatz

4.2.6 Abkühlungsvorgang

Abkühlungs- bzw. Aufheiz-Vorgänge lassen sich mit dem hier vorgeschlagenen Verfahren besonders leicht lösen, da die komplizierten Integrale aus (1.93) entfallen und lediglich der Anteil aus der Anfangsbedingung sowie der einfache statische Teil verbleiben.

Weil in der Regel die ersten Augenblicke nach dem "Temperaturschock" uninteressant sind, genügt es meistens, die Berechnung mit nur einem Reihenglied durchzuführen.

Bei der aufgestellten Vergleichsrechnung konnte für $t \geq 2$ Stunden gegenüber der eingliedrigen Lösung kein Genauigkeitszuwachs durch eine größere Anzahl der Glieder mehr erreicht werden.

Demgegenüber ist für die ersten Minuten eine größere Anzahl von Gliedern notwendig. Wie sich aus den Zeichnungen ersehen läßt, reichen jedoch schon sieben Glieder für eine sehr gute Annäherung an den tatsächlichen Temperaturverlauf nach 15 Minuten aus.

Für den Genauigkeitsvergleich wurde das von Schmidt in [1] durchgeführte Beispiel ausgewählt.

Eine 40 cm starke Betonwand mit einer Temperatur von 20 °C wird auf 0 °C abgekühlt. Als Materialdaten sind vorgegeben:

$$\lambda = 1,0 \text{ kcal/(m h grd)}$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 0,25 \text{ kcal/(kg grd)}$$

$$\alpha = 5,0 \text{ kcal/(m}^2 \text{ h grd)}$$

Für das graphische Verfahren wurde die Wand in 8 Schichten der Größe $\Delta x = 5$ cm aufgeteilt. Der zeitliche Abstand zweier Temperaturkurven wurde auf $\Delta t = \frac{1}{8}$ Std. festgelegt.

Hält man sich streng an diese (veralteten) Dimensionsangaben, so läßt sich, ohne Umrechnung in die heute gebräuchlichen Einheiten, das Ergebnis sofort richtig angeben.

Bei dem hier durchgeführten direkten Vergleich mit der zeichnerischen Lösung erkennt man auf den ersten Blick die volle Übereinstimmung für die ersten Stunden.

Die größeren Abweichungen für $t \geq 15$ Stunden sind in der Zeichnungsgenauigkeit von Schmidt begründet.

Temperaturverlauf (°C)

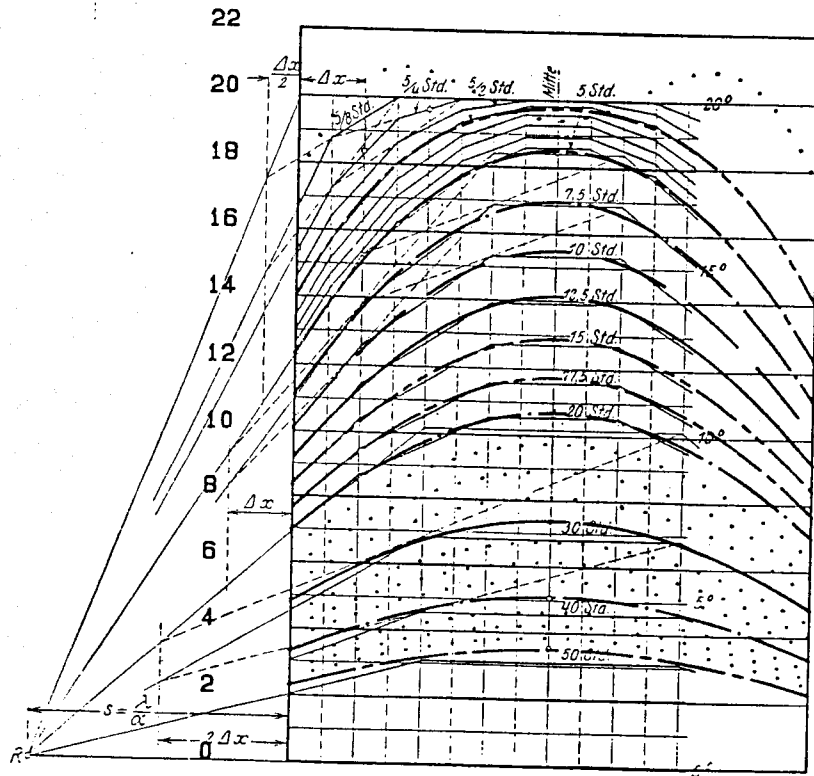


Bild 30: Vergleich mit dem zeichnerischen Verfahren von Schmidt [1]

(Die berechneten Temperaturverläufe sind durch Fettdruck dargestellt.)

Temperaturverlauf (°C)

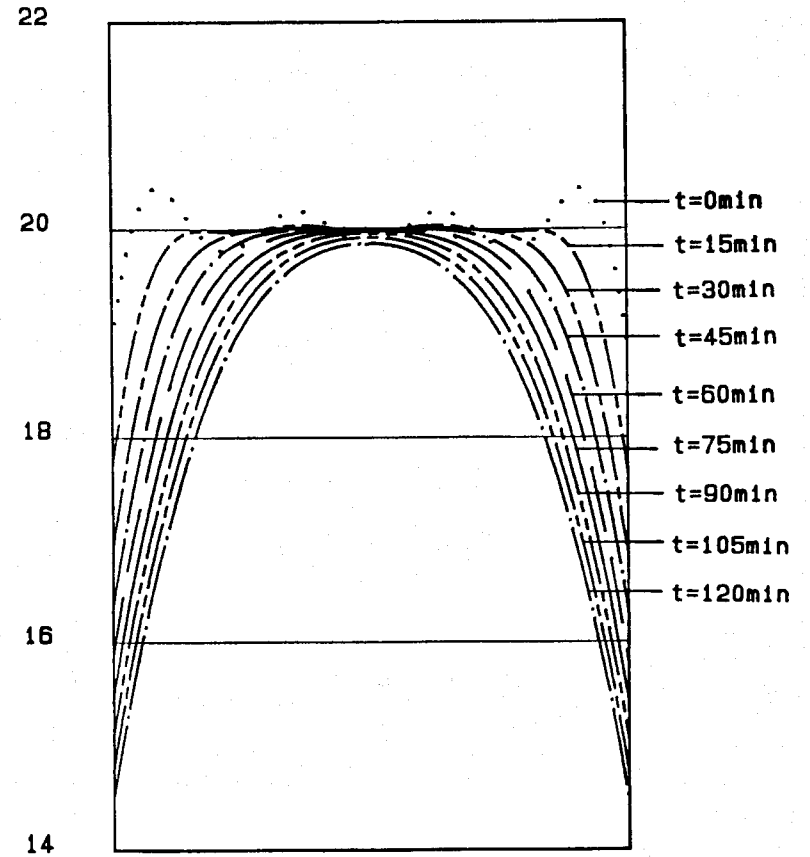


Bild 31: Verlauf in den ersten 2 Stunden für einen siebengliedrigen Reihenansatz

Temperaturverlauf (°C)

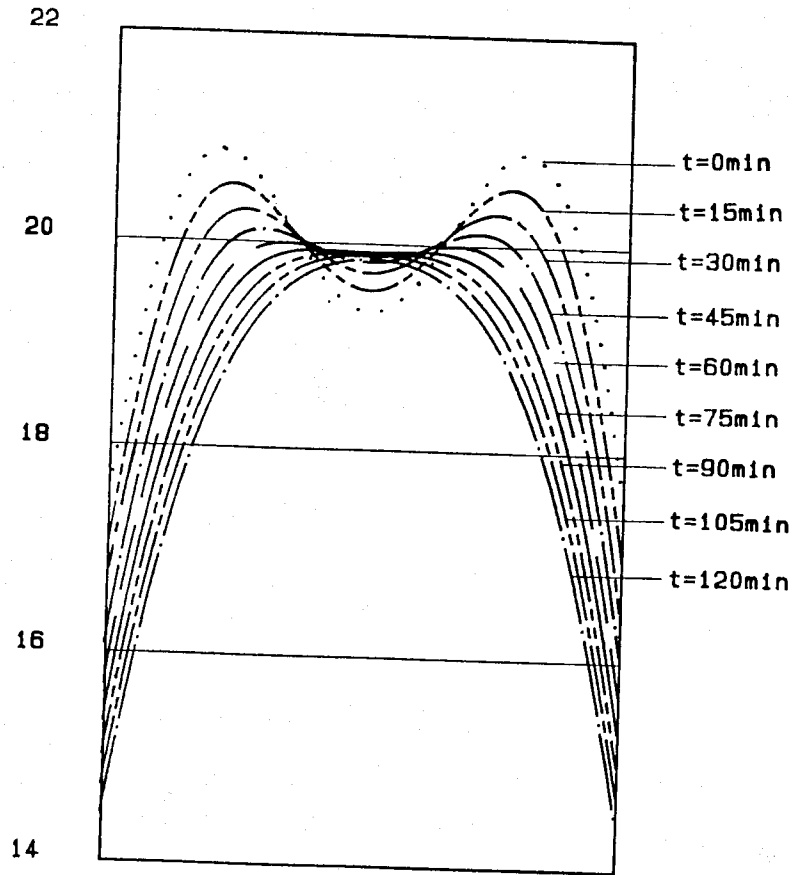


Bild 32: Verlauf in den ersten 2 Stunden für einen dreigliedrigen Ansatz

4.2.7 Zweidimensionale Temperaturfelder

Wie unter Ziffer 2 abgeleitet, lassen sich zweidimensionale Temperaturprobleme aus der Überlagerung der beiden eindimensionalen Ergebnisse errechnen.

Bei dem hier näher untersuchten Sonderfall einer quadratischen Stütze mit allseitig gleichen Temperaturen und Wärmeübergängen läßt sich das Temperaturfeld durch Superposition der eindimensionalen Lösung mit sich selbst bestimmen.

Für die Vergleichsrechnung wurde ein Aufheizvorgang gewählt. Die Anfangstemperatur war auf

$$\vartheta_0 = 0 \text{ °C}$$

die Umgebungs-Lufttemperatur auf

$$\vartheta_L = 20 \text{ °C}$$

festgesetzt. Der Stütze lagen folgende Daten zugrunde:

- $\lambda = 0,28 \text{ W/(mK)}$
- $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$
- $c = 0,25 \text{ Wh/'kgK)}$
- $s = 0,10 \text{ m}$
- $\alpha = 8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

Zum Vergleich wurde die Finite-Element-Methode (FEM) herangezogen. Die Auswertung erfolgte mit einem eingliedrigen Lösungsansatz über die ersten fünf Stunden, da bei dem hier gewählten Beispiel der Aufheizvorgang etwa nach diesem Zeitraum abgeschlossen war.

Die nachfolgend gezeigte Gegenüberstellung der Ergebnisse macht deutlich, daß merkbare Abweichungen nur in der ersten Stunde auftreten.

Für höhere Genauigkeiten in den ersten Minuten wäre eine größere Anzahl von Reihengliedern erforderlich. (siehe hierzu auch Ziffer 4.2.1)

Zum Zeitpunkt $t = 0,5$ Stunden beträgt die maximale Abweichung von der Finite-Element-Methode nur $0,27 \text{ }^\circ\text{C}$, der größte prozentuale Fehler liegt bei $3,7 \%$.

Wie sich aus den weiteren Vergleichen leicht ersehen läßt, sind die Abweichungen nach zwei Stunden nur noch in den Rechenungenauigkeiten der Verfahren begründet.

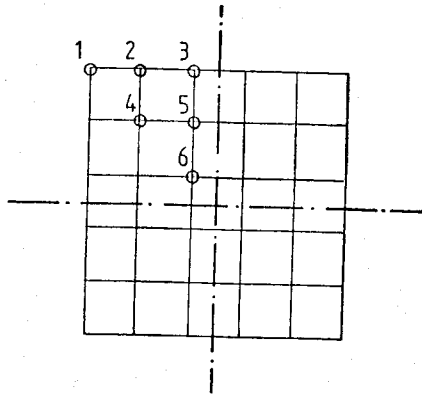


Bild 33: Knotenbezeichnung zur Berechnung nach der Finite-Element-Methode (FEM)

Vergleich eines eingliedrigen Lösungsansatzes mit der Finite-Element-Methode:

Zeitpunkt: $t = .5 \text{ h}$

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	14.91	15.07	.16	1.09
2	12.48	12.70	.22	1.73
3	11.22	11.41	.19	1.71
4	8.90	9.17	.27	3.06
5	7.03	7.27	.24	3.39
6	4.85	5.03	.18	3.70

Zeitpunkt: $t = 1.0 \text{ h}$

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	17.05	17.10	.05	.29
2	15.64	15.70	.06	.39
3	14.88	14.94	.06	.44
4	13.53	13.63	.10	.72
5	12.41	12.51	.10	.78
6	11.08	11.19	.11	.98

Zeitpunkt: $t = 2.0 \text{ h}$

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	19.00	19.00	.00	-.03
2	18.51	18.51	.00	.00
3	18.25	18.25	.00	-.01
4	17.80	17.79	-.01	-.04
5	17.41	17.40	-.01	-.03
6	16.95	16.95	.00	-.01

Zeitpunkt: t = 3.0 h

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	19.66	19.65	-.01	-.04
2	19.49	19.48	-.01	-.03
3	19.40	19.39	-.01	-.03
4	19.25	19.24	-.01	-.08
5	19.11	19.10	-.01	-.05
6	18.96	18.94	-.02	-.09

Zeitpunkt: t = 4.0 h

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	19.88	19.88	.00	.00
2	19.83	19.82	-.01	-.04
3	19.80	19.79	-.01	-.05
4	19.74	19.74	.00	-.03
5	19.70	19.69	-.01	-.06
6	19.64	19.63	-.01	-.03

Zeitpunkt: t = 5.0 h

Knoten	Temperatur		Differenz	
	nach FEM	errechnet	abs.	%
1	19.96	19.96	.00	-.01
2	19.94	19.94	.00	-.01
3	19.93	19.93	.00	-.01
4	19.91	19.91	.00	-.01
5	19.90	19.89	-.01	-.04
6	19.88	19.87	-.01	-.03

4.3 Laborversuch

Um eine Abschätzung der tatsächlichen Genauigkeit von Rechenmodellen vornehmen zu können, sind Vergleichsmessungen an Probekörpern unumgänglich. Für den hier durchgeführten Laborversuch wurde ein Kubus aus Leichtmörtel mit den Abmessungen 40 cm x 30 cm x 16 cm gewählt. Die Auswertung wurde mit Hilfe von 20 Thermodraht-Temperaturfühlern innerhalb des Meßkörpers, gemäß Bild 34, sowie mit 10 Umgebungsluftfühlern vorgenommen. Die Dokumentation der Daten erfolgte mit einem Meßwerterfassungssystem, das die Temperaturverläufe aller 30 Meßpunkte gleichzeitig aufzeichnete. Da die Steuerung der Temperatorkammer keine kontinuierlich veränderliche Temperatur ermöglichte, wurde ein stetiger Abkühlungsvorgang gewählt. Die Anfangstemperatur des Prüfkörpers betrug 60°C. Nach Abschalten der Heizung stellte sich für die Umgebungslufttemperatur im Wärmeschrank eine für jede Körperseite geringfügig abweichende exponentielle Abkühlfunktion ein, welche (als Mittelwert) für die Berechnung bereichsweise leicht durch Polynome 2. und 3. Ordnung approximiert werden konnte.

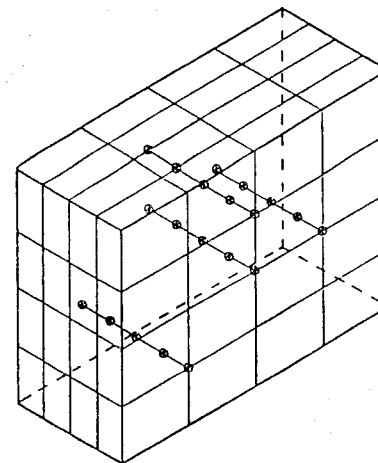


Bild 34: Anordnung der Meßpunkte innerhalb des Probekörpers

Die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärme des Versuchsmaterials (Zuschlag aus feinkörnigem Blähton) wurden aus der Literatur [20],[21] anhand der Dichte des Probekörpers ermittelt.

$$\begin{aligned}\rho &= 1150 \text{ kg/m}^3 \\ \lambda &= 0,43 \text{ W/(mk)} \\ c &= 0,28 \text{ Wh/(kgh)}\end{aligned}$$

Da in dem Versuchsschrank der Wärmeübergang im wesentlichen aus Konvektion besteht und mit wachsender Temperaturangleichung die Konvektion und damit der Wärmeübergangskoeffizient immer kleiner wird, ist gemäß [20] für den Auswertzeitraum ein Mittelwert angesetzt worden:

$$\alpha = 4 \text{ W/(m}^2\text{h)}$$

Zur besseren Übersicht erfolgte die Auswertung für die in Bild 35 dargestellte Anordnung.

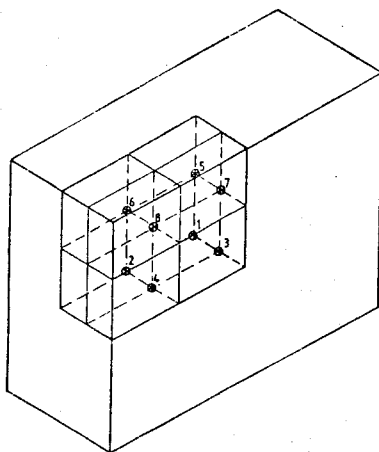


Bild 35: Bezeichnung der Messpunkte für die Auswertung

Bei symmetrisch angeordneten Messpunkten (siehe Bild 34) sind die Temperaturen gemittelt worden.

Eine Gegenüberstellung der errechneten und gemessenen Temperaturen der ersten sechs Stunden nach der dreidimensionalen Theorie folgt auf den nächsten Seiten. In der ersten Vergleichsauswertung ist ein eingliedriger Lösungsansatz benutzt worden. Dabei liegt die maximale Differenz bei 4,81°C bzw. 8,5 %. Die zweite Gegenüberstellung zeigt einen zehngliedrigen Ansatz, wobei die Abweichung maximal 2,65°C bzw. 6,2 % ist. Die geringsten Abweichungen von 0,61°C oder 1,4% liegen bei Messpunkt 1, weil sich dort die versuchsbedingten Ungenauigkeiten am stärksten kompensieren.

Hiermit ist ein anschaulicher Beweis der Richtigkeit des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens erbracht. Weitere Genauigkeitssteigerungen sind bei der Realisierung eines konstanten Wärmeübergangskoeffizienten zu erwarten.

Vergleich der Meßwerte mit einem eingliedigen Lösungsansatz:

Zeitpunkt: t = 1 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	59.70	64.20	4.50	7.5
2	59.50	61.70	2.20	3.7
3	58.75	62.92	4.17	7.1
4	58.50	60.48	1.98	3.4
5	59.50	62.12	2.62	4.4
6	59.10	59.70	.60	1.0
7	58.85	60.88	2.03	3.5
8	58.10	58.51	.41	.7

Zeitpunkt: t = 2 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	57.90	62.71	4.81	8.3
2	57.10	59.22	2.12	3.7
3	56.20	60.98	4.78	8.5
4	55.30	57.59	2.29	4.1
5	57.40	59.82	2.42	4.2
6	55.50	56.49	.99	1.8
7	56.15	58.17	2.02	3.6
8	53.90	54.94	1.04	1.9

Zeitpunkt: t = 3 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	55.00	59.10	4.10	7.5
2	53.40	55.24	1.84	3.4
3	53.05	57.24	4.19	7.9
4	51.55	53.50	1.95	3.8
5	54.30	55.91	1.61	3.0
6	51.10	52.25	1.15	2.3
7	52.75	54.15	1.40	2.7
8	49.35	50.61	1.26	2.6

Zeitpunkt: t = 4 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	51.70	54.58	2.88	5.6
2	49.50	50.69	1.19	2.4
3	49.70	52.78	3.08	6.2
4	47.80	49.02	1.22	2.5
5	50.80	51.39	.59	1.2
6	47.00	47.73	.73	1.6
7	49.35	49.69	.34	.7
8	45.35	46.15	.80	1.8

Zeitpunkt: t = 5 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	48.20	49.94	1.74	3.6
2	45.90	46.18	.28	.6
3	46.30	48.25	1.95	4.2
4	44.25	44.61	.36	.8
5	47.40	46.87	-.53	-1.1
6	43.40	43.34	-.06	-.1
7	46.00	45.29	-.71	-1.5
8	41.85	41.87	.02	.1

Zeitpunkt: t = 6 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	44.40	45.39	.99	2.2
2	42.50	41.85	-.65	-1.5
3	43.15	43.86	.71	1.7
4	41.15	40.44	-.71	-1.7
5	44.10	42.52	-1.58	-3.6
6	40.20	39.20	-1.00	-2.5
7	42.85	41.09	-1.76	-4.1
8	38.90	37.88	-1.02	-2.6

Vergleich der Meßwerte mit einem zehngliedrigen Lösungsansatz:

Zeitpunkt: t = 1 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	59.70	59.74	.04	.1
2	59.50	59.69	.19	.3
3	58.75	59.12	.37	.6
4	58.50	59.07	.57	1.0
5	59.50	59.57	.07	.1
6	59.10	59.52	.42	.7
7	58.85	58.95	.10	.2
8	58.10	58.90	.80	1.4

Zeitpunkt: t = 2 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	57.90	58.08	.18	.3
2	57.10	57.64	.54	1.0
3	56.20	56.85	.65	1.1
4	55.30	56.42	1.12	2.0
5	57.40	57.21	-.19	-.3
6	55.50	56.78	1.28	2.3
7	56.15	55.99	-.16	-.3
8	53.90	55.57	1.67	3.1

Zeitpunkt: t = 3 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	55.00	55.24	.24	.4
2	53.40	54.20	.80	1.5
3	53.05	53.73	.68	1.3
4	51.55	52.72	1.17	2.3
5	54.30	53.68	-.62	-1.2
6	51.10	52.66	1.56	3.1
7	52.75	52.21	-.54	-1.0
8	49.35	51.23	1.88	3.8

Zeitpunkt: t = 4 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	51.70	51.66	-.04	-.1
2	49.50	50.06	.56	1.1
3	49.70	50.10	.40	.8
4	47.80	48.55	.75	1.6
5	50.80	49.65	-1.15	-2.3
6	47.00	48.11	1.11	2.4
7	49.35	48.15	-1.20	-2.4
8	45.35	46.66	1.31	2.9

Zeitpunkt: t = 5 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	48.20	47.75	-.45	-.9
2	45.90	45.76	-.14	-.3
3	46.30	46.25	-.05	-.1
4	44.25	44.32	.07	.2
5	47.40	45.53	-1.87	-3.9
6	43.40	43.63	.23	.5
7	46.00	44.10	-1.90	-4.1
8	41.85	42.26	.41	1.0

Zeitpunkt: t = 6 h

Messpunkt	Temperatur		Differenz	
	gemessen	errechnet	abs.	%
1	44.40	43.79	-.61	-1.4
2	42.50	41.57	-.93	-2.2
3	43.15	42.40	-.75	-1.7
4	41.15	40.25	-.90	-2.2
5	44.10	41.52	-2.58	-5.8
6	40.20	39.42	-.78	-1.9
7	42.85	40.20	-2.65	-6.2
8	38.90	38.16	-.74	-1.9

5. Vereinfachung der Berechnung für Abkühlungsvorgänge

Bei Auskühl- bzw. Aufheizvorgängen kommt aus (1.93) lediglich der Anteil aus der Anfangsbedingung zum Tragen. Im allgemeinen läßt sich für größere Zeiten ($t \geq 2h$) folgende Näherung angeben.

$$\overset{m}{T}(z,t) = \overset{m}{\varphi}(z) \cdot \overset{m}{\delta}_1 \cdot e^{-\omega_k(t-t_0)} \quad (5.1)$$

Betrachtet man den Sonderfall der Abkühlung einer einschichtigen Wand mit der Endtemperatur von 0°C und den Vereinbarungen

$$\overset{1}{T}(z,t) = \overset{1}{T}(z,t)$$

$$\overset{1}{\kappa} = \overset{1}{\kappa}_1$$

$$\omega = \omega_1$$

$$B = B_1 = \frac{\lambda \cdot \overset{1}{\kappa}}{\alpha_1}$$

$$\varphi = \sin(\overset{1}{\kappa}z) + B \cos(\overset{1}{\kappa}z)$$

$$\delta = \delta_1$$

$$t_0 = 0$$

so lautet (5.1):

$$\overset{1}{T}(z,t) = \varphi(z) \cdot \delta \cdot e^{-\omega t} \quad (5.2)$$

Soll der Zeitpunkt ermittelt werden, zu dem an einer gewünschten Stelle z eine bestimmte Temperatur $\overset{*}{T}$ ($0 \leq \overset{*}{T} < \overset{0}{T}$) herrscht, so folgt

$$t = -\ln\left(\frac{\overset{*}{T}}{\varphi(z)\delta}\right) \cdot \frac{1}{\omega} \quad (5.3)$$

Besonders einfach ergibt sich die Formel der Auskühlzeit für die Oberfläche bei beidseitig gleichen Wärmeübergängen.

$$\varphi(z=0) = B \cdot \cos(0) = \frac{\lambda \cdot \overset{1}{\kappa}}{\alpha} = \varphi(z=s)$$

$$t = -\ln\left(\frac{\overset{*}{T}\alpha}{\lambda \cdot \overset{1}{\kappa} \delta}\right) \cdot \frac{1}{\omega} \quad (5.4)$$

In dieser Formel ist lediglich der Wert δ gemäß (1.86) rechnerisch zu bestimmen. $\overset{1}{\kappa}$ und ω lassen sich aus Diagrammen bestimmen. Für zwei Grenzfälle von Innenwänden sind in Bild 36 und Bild 37 Diagramme entwickelt worden.

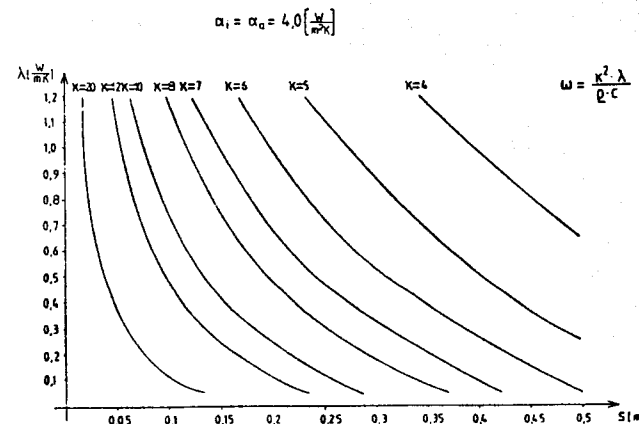


Bild 36: Diagramm zur Bestimmung der Eigenwerte für $\alpha = 4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

Wie aus (5.1) und (5.2) leicht zu ersehen ist, läßt sich das zeitliche Abklingverhalten allein durch den Exponenten der e-Funktion angeben. Für den Temperatur-Halbwert demnach

$$e^{-\omega t} = 0,5 \tag{5.5}$$

und daraus die Temperatur-Halbwertzeit

$$t_H = -\frac{\ln(0,5)}{\omega} = \frac{0,693}{\omega} = \frac{0,693 \rho \cdot c}{\kappa^2 \cdot \lambda} \tag{5.6}$$

Damit ist ein einfaches Verfahren zur Bestimmung von Auskühlzeiten gegeben. Mit Hilfe von Diagrammen lassen sich sofort Angaben über die Speicherfähigkeit von Bauteilen treffen.

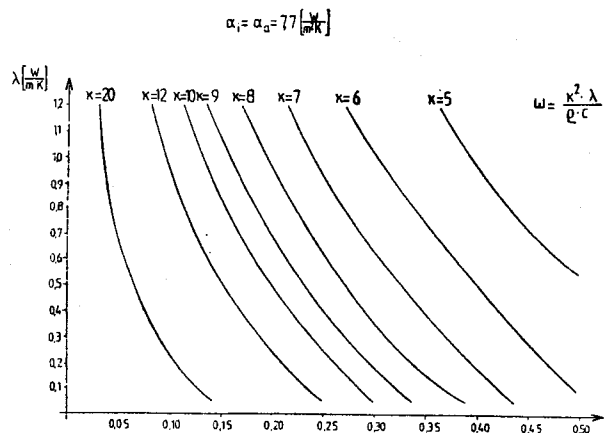


Bild 37: Diagramm zur Bestimmung der Eigenwerte für $\alpha = 7,7 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

6. Schlußbemerkungen

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde erstmals für ein-dimensionale mehrschichtige Bauteile bei beliebigen Randbedingungen und Wärmequellen eine analytische Lösung angegeben.

Anhand zahlreicher Vergleichsrechnungen konnte die Richtigkeit des Verfahrens festgestellt werden. Im Gegensatz zu den anderen analytischen Methoden, welche lediglich Sonderfälle betrachten, ist die hier hergeleitete Lösung allgemeingültig. Gegenüber den numerischen Verfahren besitzt sie den Vorteil der leichten Handhabung und Übersichtlichkeit, so daß zur Auswertung die Benutzung von programmierbaren Rechnern zwar empfehlenswert, jedoch nicht notwendig ist. Computer-Methoden setzen zudem eine leistungsfähige Hard- und Software voraus. Eine rasche Überschlagsrechnung für die Praxis läßt sich mit dem hier aufgestellten Verfahren wesentlich einfacher herstellen.

Dank der guten Konvergenz des in dieser Arbeit aufgezeigten Verfahrens erzielt man für viele Probleme aus der bauphysikalischen Praxis schon bei Berücksichtigung nur eines Reihengliedes brauchbare Ergebnisse; bei drei Gliedern sind die Abweichungen schon vernachlässigbar klein.

Ausnahmen davon können lediglich bei folgenden Problemstellungen vorkommen:

- Approximation einer linearen Anfangsbedingung
- Einschwingvorgänge in den ersten Minuten (Abkühl- bzw. Aufheizvorgänge)
- mehrschichtige Konstruktionen mit stark voneinander abweichenden Material-Eigenschaften und/oder extrem unterschiedlichen Schichtdicken.

Auch hierfür lassen sich, jedoch mit einer größeren Anzahl von Reihengliedern, die Ergebnisse genau bestimmen.

Für alle Aufgabenstellungen können numerische Instabilitäten ausgeschlossen werden, da die Reihenzuwächse gegen Null konvergieren. Beachtlich sind die guten Übereinstimmungen der Theorie mit dem durchgeführten Laborversuch. Die Abweichungen liegen etwa in der gleichen Größenordnung wie die Toleranzen der Materialkennwerte.

Von praktischer Bedeutung ist die einfache Berechnung der Auswirkungen beliebiger innerer Wärmequellen und -senken. Hierfür lag bisher kein Lösungsalgorithmus vor, so daß auf Computer-(Näherungs)-Verfahren zurückgegriffen werden mußte. Die hier vorgeschlagene Methode könnte beispielsweise vorteilhaft bei der Optimierung von Fußbodenheizungen oder beheizter Wände aber auch im Kraftwerks- und Maschinenbau Eingang finden.

Ein Diskussionsbeitrag zum Thema "Speicherverhalten von Bauteilen" wird unter Ziffer 5 geliefert. Da dieses Thema in jüngster Zeit häufig aufgegriffen wurde, wird hier, in Anlehnung an viele technische Abklingprozesse, der Begriff "Temperatur-Halbwertzeit" vorgeschlagen. Mit Hilfe von Diagrammen lassen sich damit sofort Angaben zur "Speicherfähigkeit" treffen.

6.2 Ausblick

Im folgenden werden einige Möglichkeiten aufgezeigt, die hier entwickelte Theorie auf verschiedene Anwendungsgebiete zu erweitern:

- Die Aufbereitung des Verfahrens für die Baupraxis ist für periodische Randbedingungen in einfacher Weise möglich, da sich die einzig komplizierten Integrale aus dem Temperaturgedächtnis dann sofort auflösen lassen. Die Eigenwerte können, wie bereits gezeigt, über Diagramme bestimmt werden.
- Um die Berechnung für temperaturabhängige Stoffwerte (z.B. bei Brand) durchführen zu können, ist es möglich, für kleine Zeitabschnitte Δt wie angegeben mit konstanten Materialdaten zu arbeiten, das Ergebnis jeweils als Anfangsbedingung für das nächste Zeitintervall abzuspeichern, um dann mit den neuen aktuellen Daten fortzufahren.
- Für Zylinder-Koordinaten läßt sich in völliger Analogie ein Lösungsalgorithmus angeben.
- Die in dieser Arbeit aufgezeigte Lösung bietet die Grundlage für die analytische Lösung der Diffusionsgleichung, indem sie die aktuelle instationäre Temperatur in praktisch verwertbarer Weise zur Verfügung stellt und einen Ansatz zur Lösung der Diffusions-Differentialgleichung liefert.

Literaturverzeichnis

- [1] Schmidt, E.:
Einführung in die technische Thermodynamik,
Springer Verlag 1963
- [2] Eckert, E.:
Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch,
Springer Verlag 1966
- [3] Gröber, H., Erk, S., Grigull, U.:
Grundgesetze der Wärmeübertragung, Springer
Verlag 1963
- [4] Grigull, U., Sandner, H.:
Wärmeleitung, Springer Verlag 1979
- [5] Goodman, Th.R.:
The use of integral methods in heat transfer,
Schriftenreihe: Advances in heat Transfer,
New York 1964
- [6] Hell, F.:
Grundlagen der Wärmeübertragung, VDI-Verlag 1982
- [7] Haferland, F.:
Das wärmetechnische Verhalten mehrschichtiger
Außenwände, Bauverlag 1970
- [8] Gertis, K., Hauser, G.:
Instationärer Wärmeschutz, Berichte aus der Bau-
forschung, Heft 103, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn
- [9] Sommerfeld, A.:
Partielle Differentialgleichungen der Physik,
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig
Leipzig 1962
- [10] Tychonoff A.N., Samarski, A.A.:
Differentialgleichungen der mathematischen Physik,
VEB Verlag Berlin 1959
- [11] Flügge, S.:
Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II,
Springer Verlag 1967
- [12] Courant, R., Hilbert, D.:
Methoden der mathematischen Physik II,
Springer Verlag 1968
- [13] Nowacki, W.:
Baudynamik, Springer Verlag 1974

- [14] Parkus, H.:
Thermoelasticity, Springer Verlag 1976
- [15] Schroeder, F.H.:
Die thermodynamischen Hauptsätze in der
Kontinuumsmechanik, TU Hannover, Ber.-Nr. 73-S1
- [16] Heinen, A.H.:
Dynamische Grundgleichungen und kinetische
Instabilität dünner, elastischer Schalentragwerke
unter Einbeziehung der thermodynamischen Hauptsätze,
Habilitationsschrift im Fachbereich Bautechnik
der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal
- [17] Stelzer, I.F.:
Die Lösung der stationären und instationären
Temperaturfeldgleichung für ebene und räumliche
Körper mittels der Finite-Element-Methode,
KFA Jülich
- [18] Fairweather, G.:
Finite Element Galerkin Methods for Differential
Equations, Mathematics Department, University
of Kentucky
- [19] Heindl, W.:
Neue Methoden zur Beurteilung des Wärmeschutzes
im Hochbau, Zeitschrift Ziegelindustrie 4/67,5/67,6/67
- [20] Tabellarium aller wichtigen Größen für den
Wärme- Kälte- Schallschutz,
Rheinhold & Mahla GmbH, 1967
- [21] Bauphysik Taschenbuch 1985,
Bauverlag
- [22] Bronstein, I., Semendjefew, K.:
Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlag
Leipzig, 1975